# 三角形の垂心の重心座標表現

以下「ベクトル ＡＢ」などを $\overrightarrow{AB}$で表すことにする。

まず、結果だけ述べておこう。

三角形ＡＢＣを含むm次元ユークリッド空間を $E^m$ただし m≧２としておく。

このとき$E^m$の任意の点Ｐにたいして、

---

(あ) 三角関数表示では

$$\overrightarrow{PH} = \cot B \cot C \overrightarrow{PA} + \cot C \cot A \overrightarrow{PB} + \cot A \cot B \overrightarrow{PC}$$
・・・(1)

となる。ここで,2008.8.26 の「ブログ」で示したように、

$$\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1 \cdots (2)$$

なので (1)は

「垂心Ｈのベクトルによる重心座標表現」である。これは直角三角形でも成立する。

例えば $\angle A = 90^\circ$の直角三角形では「垂心Ｈ」は明らかに頂点Ａであるが、

$\cot 90^\circ = 0$ なので $\cot A = 0$
すると上の公式(1)から

$$\overrightarrow{PH} = \cot B \cot C \overrightarrow{PA}$$ ・・・(*)

ところが $A = 90^\circ$ならば $B + C = 90^\circ$なので、

$$\cot B \times \cot C = \cot B \times \cot (90^\circ - B) = \cot B \tan B = 1$$

となる。
よって

$\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PA}$・・・(#)となり、これから
「垂心Ｈ]=「頂点Ａ」と正しく求まる。

---

(い) 「内積」を用いた表示では、

$$\overrightarrow{PH} = \frac{1}{4S^2} \left( yz\overrightarrow{PA} + xz\overrightarrow{PB} + xy\overrightarrow{PC} \right)$$ ・・・(3)

ここに、$x = \left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right), y = \left( \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \right), z = \left( \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \right)$ である。

ただし、$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$は$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の「内積」を表すものとする。

$$yz + xz + xy = 4S^2 \quad \cdots (4)$$

が成立する(下に証明がしてある）ので、(3)は「ベクトルによる重心座標表現」である。

また、$S$は三角形ＡＢＣの面積である。

---

(う)3辺$a, b, c$を用いた表示では、

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{PH} \\
&= \frac{1}{16S^2}\left(c^2 + a^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\overrightarrow{PA} \\
&+ \frac{1}{16S^2}\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\overrightarrow{PB} \\
&+ \frac{1}{16S^2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(c^2 + a^2 - b^2\right)\overrightarrow{PC} \quad \cdots (5)
\end{aligned}$$

ここで ヘロンの公式から、

$$16S^2 = (a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \cdots (6)$$

である。

<注意>：(う)は(い）から導けるのである。

まず、定義から内積の変形を用いて $x + y = c^2, x + z = b^2, y + z = a^2$ ・・(7)が成立する。

例えば $x + y = c^2$は次のように証明される。

$$\begin{aligned}
x &= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(-\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) \\
&= \left(-\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) + |\overrightarrow{BA}|^2 = -y + c^2
\end{aligned}$$

となるから $x + y = c^2$である。

よって

$$yz + xz + xy = z(x + y) + xy = \left(b^2 - x\right)c^2 + x\left(c^2 - x\right) = b^2c$$

$$= |\overrightarrow{AC}|^2|\overrightarrow{AB}|^2 - \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)^2 = 4S^2$$

すなわち$yz + xz + xy = 4S^2$・・・(4)が成立するのである。

また 余弦定理から

$$x = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{(AB)^2 + (AC)^2 - (BC)^2}{2}$$

$$= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \quad \cdots (8)$$

同様に

$$y = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{(BA)^2 + (BC)^2 - (AC)^2}{2}$$

$$= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \quad \cdots (9)$$

$$z = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{(CA)^2 + (BC)^2 - (AC)^2}{2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \quad \cdots (10)$$

となるからである。したがって （あ）または（い）を覚えていればよい。