2007 P3 核力の荷電独立性の検証

足立、浅野、入谷、佐田、佐藤、山本

2008/03/31

目次

1	Introduction	5
2	理論	6
2.1	IAS	6
2.2	stripping 反応、pick-up 反応	6
2.3	PWBA	9
2.4	kinematics	9
2.5	Bethe-Bloch Formula	9
2.6	isospin による選択則	10
3	実験設計	12
3.1	反応	12
3.2	beam および加速器	12
3.3	Set Up	13
3.4	$\frac{dE}{dx}$ 法	13
3.5	detector とその設置	13
3.6	回路	14
4	解析	16
4.1	fitting	16
4.2	Calibration	17
4.3	excited energy	18
4.4	isoscalar 準位と isovector 準位の解析	24
4.5	微分断面積	25
4.6	DWBA による角運動量移行の決定	29
4.7	断面積の直接の比較による、類似性の確認	38
4.8	微分断面積の運動量移行分布の比較....................................	40
5	総括	44
6	参考文献	45
7	APPENDIX	46
7.1	Kinematics の計算	46
7.2	Lab 系から CM 系への変換	47

図目次

2.1	stripping 反応と pick-up 反応		•		•			•							•	•		•	•	•	•	•				•	•	6	;
-----	--------------------------	--	---	--	---	--	--	---	--	--	--	--	--	--	---	---	--	---	---	---	---	---	--	--	--	---	---	---	---

2.2	momentum transfer	7
3.1	散乱層	14
3.2	回路略図	15
4.1	13 Ctarget d beam 65.9° data	16
4.2	¹³ Ctarget d beam 80.9 gs	16
4.3	12 Ctarget 60.9	16
4.4	d (d beam)	17
4.5	alpha (d beam)	17
4.6	p (d beam)	17
4.7	alpha (³ He beam)	18
4.8	d (³ He beam) \ldots	18
4.9	A=11	19
4.10	A=13	20
4.11	A=14	23
4.12	A=15	23
4.13	ビームの広がりによる立体角誤差	26
4.14	¹³ C(d,d) ¹³ C 微分断面積	27
4.15	$^{12}\mathrm{C}(\mathrm{d},\mathrm{p})^{13}\mathrm{C},$ ground state \hdots	30
4.16	$^{12}\mathrm{C}(\mathrm{d},\mathrm{p})^{13}\mathrm{C},$ ground state, DWBA $\hfill \ldots$	30
4.17	$^{12}C(^{3}He, d)^{13}N$, ground state	31
4.18	$^{12}C(^{3}He, d)^{13}N$, ground state, DWBA	32
4.19	$^{13}C(d,p)^{14}C$, ground state	33
4.20	$^{13}\mathrm{C}(\mathrm{d},\mathrm{p})^{14}\mathrm{C},$ ground state, DWBA $\hfill \ldots$ $\hfill \ldots$ $\hfill \ldots$	33
4.21	$^{13}C(^{3}He, d)^{14}N$, ground state, isoscalar	34
4.22	$^{13}C(^{3}He, d)^{14}N$, ground state, isoscalar, DWBA	35
4.23	${}^{13}C({}^{3}He, d){}^{14}N$, 1st excited state, isovector	36
4.24	${}^{13}C({}^{3}He, d){}^{14}N$, 1st excited state, isovector, DWBA	36
4.25	$^{12}\mathrm{C}(\mathrm{d},\mathrm{p})^{13}\mathrm{C}, ^{12}\mathrm{C}(^{3}\mathrm{He},\mathrm{d})^{13}\mathrm{N},$ ground state $\hfill \ldots $	38
4.26	${}^{12}C(d,p){}^{13}C, {}^{12}C({}^{3}He,d){}^{13}N$, 1st excited state	39
4.27	${}^{13}C(d,p){}^{14}C, {}^{13}C({}^{3}He,d){}^{14}N$	40
4.28	$^{12}C(d,p)^{13}C$, $^{12}C(^{3}He,d)^{13}N$, ground state	41
4.29	$^{12}C(d,p)^{13}C$, $^{12}C(^{3}He,d)^{13}N$, 1st excited state	42
4.30	${}^{13}C(d,p){}^{14}C, {}^{13}C({}^{3}He,d){}^{14}N$	43
7.1	$A(a,b)B \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots $	47
7.2	Lab-system,CM-System	47
7.3	angle:cm to lab	48

表目次

3.2	beam	 13
3.3	detector	 13
3.4	target	 14
3.5	geometry	 14
4.1	calibration	 17
4.2	A=11	 19
4.3	A=13	 20
4.4	14C	 21
4.5	14N	 21
4.6	15N	 22
4.7	DWBA 解析結果	 37

1 Introduction

原子核を構成している要素、核子には陽子と中性子の二つがある。電荷の有無を除くとこの2つの粒子は非 常によく似通っていて、その原子核を形成している力、核力はこの二種類の核子に同じように振る舞うことが 知られている。今回の実験の目的は、核力の荷電独立性を検証することにある。

そのために何をするのかというと、今回我々は同重核 (Isobar) の核構造を調べることにした。つまり、 核 力の荷電独立性が成立しているならば、同重核の核構造は非常に似通ったものとなるはずである。そして、核 構造の類似性を調べるため、原子核の励起準位の測定を行った。

2 理論

2.1 IAS

陽子と中性子はその電荷の有無を除けば非常に似通っているので、、ある意味で陽子と中性子を粒子の異なる状態とみなすことができる。spin 1/2 の粒子が spin up, down と二重項を作ることの類推として、荷電空間 (isospace) における spin(isospin) を考えて、その isospin up,down に陽子と中性子を対応させる。ここでは、陽子を isospin +1/2、中性子を isospin -1/2 とする。

spin についてと同様に isospin についても Pauli matrix を定義して

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
(2.1)

この組み合わせ

$$\tau_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\tau_1 \pm i \tau_2 \right) \tag{2.2}$$

これは、isospin 昇降演算子であり

$$\tau_+|n\rangle = |p\rangle, \quad \tau_-|p\rangle = |n\rangle$$
(2.3)

と陽子と中性子を入れ替える演算子である。この演算子は純粋に荷電空間のみで作用するので空間的にはまったく核子の状態は変わらない

この演算子を原子核に作用してできる状態が Isobaric Analogue State(IAS) である。

2.2 stripping 反応、pick-up 反応

stripping 反応は入射核中の核子が標的核へ、pick-up 反応は逆に標的核中の核子が入射核へと移行する反応である。



Fig.2.1 stripping 反応と pick-up 反応

今回の実験では、陽子や中性子を付加することで、検証したい同重核を合成し調べた。

この反応では移行した核子が収まったり、引き抜かれたりした核子準位の角運動量が、放出粒子の微分断面 積の角度分布という形で分かる。 それは、次のような a,b の複合粒子が標的核に核子 b を剥ぎ取られるような例を見てみれば分かる。



Fig.2.2 momentum transfer

核子 b の角運動量は $p_b b = l_b \hbar$ なので、

$$l_b = \frac{bp_b}{\hbar} = \frac{b}{\hbar} |\mathbf{p} - \mathbf{p}_a| \tag{2.4}$$

のようになり、角運動量移行によって散乱角度は制限を受けることになる。ただ、実際は粒子は広がりをも つので、一意的に決まった角度にのみ散乱されるわけではなく、核子間の相互作用も複雑なため、この単純化 された例のようにはいかない。

角運動量移行から、その同重核の励起状態についてのより多くの情報を得ることができ、さらに踏み込んだ 同重核の核構造の類似性を調べることができる。

2.2.1 DWBA

放出粒子の角度分布から、その反応における角運動量移行を解析するために、歪曲波ボルン近似を使い断面 積を調べる。

X(a,b)Y 反応の一般的な反応断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{M_{aX}M_{bY}}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{k_b}{k_a} |T|^2 \tag{2.5}$$

行列要素は入射、放出波を ψ_{aX}, ψ_{bY} 、相互作用を起こすポテンシャルを V、始状態、終状態の波動関数を $|aX\rangle, |bY\rangle$ として

$$T = \int \psi_{bY}^*(k_b, r) \langle bY | V | aX \rangle \psi_{aX}(k_a, r) dr$$
(2.6)

ボルン近似では入射、放出波として平面波を使って近似するが、実際は入射、放出波は相互作用により歪み 平面波とはならない。

これを考慮して近似するのが、歪曲波ボルン近似 (DWBA) である。

歪曲波の計算には、光学ポテンシャル $U_{aX}(r)^{*1}$ を求めた上で Schrödinger 方程式

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2M_{aX}}\nabla^2 + U_{aX}(r)\right\}\psi_{aX}(r) = E_{aX}\psi_{aX}(r)$$
(2.7)

^{*1} これは弾性散乱 X(a,a)X の断面積の解析から求めることができる。

を解くことにより得られる。

2.2.2 DWBA による stripping, pick-up 反応の記述

X(d,p)Y反応を考える。*²行列要素は

$$T = \int \psi_{pY}^* \langle pY | V | dX \rangle \psi_{dX} dr$$
(2.8)

相互作用ポテンシャル V は U_{pY} を光学ポテンシャル、 V_{pY} を全体としてのポテンシャルとして

$$V_{pY} = U_{pY} + V$$

$$\therefore V = V_{pY} - U_{pY}$$

$$= V_{pn} + (V_{pX} - U_{pY})$$
(2.9)

 U_{pY} は出口チャンネル p + Yの光学ポテンシャルなので $V_{pX} \simeq U_{pY}$ と近似できるので

$$V = V_{pn}(r_{pn}) \tag{2.10}$$

形状因子は

$$\langle pY|V|dX \rangle = \langle pY|V_{pn}|dX \rangle = V_{pn} \langle \phi_{nX}|\phi_{pn} \rangle$$
(2.11)

ここで

$$\phi_{nX}(r_{nX}) = \langle X|Y \rangle = \langle X|X+n \rangle$$

$$\phi_{pn}(r_{pn}) = \langle p|d \rangle = \langle p|p+n \rangle$$
(2.12)

Vpn を短距離力として零作用範囲の近似

$$V_{pn}(r_{pn})\phi_{pn}(r_{pn}) \simeq D\delta(r_{pn}) \tag{2.13}$$

として計算する。

 ϕ_{nX} であるが、これは殻模型の軌道を考えて

$$\phi_{nX}(r_{nX}) = \sum_{\nu lj} A_{\nu lj} R_{\nu lj}(r_{nX}) Y_l^{m*}(\Omega_{nX})$$
(2.14)

Spectroscopic 因子 $\sqrt{S_{\nu l j}} = A^*_{\nu l j}$ と定義する。 最終的な断面積の表式は次のようになる。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{(d,p)} = \frac{M_{dX}M_{pY}}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{k_p}{k_d} D^2 \sum \left|\sqrt{S_{\nu lj}} \int \psi_{pY}^* R_{\nu lj}^*(r) Y_l^{m*}(\Omega) \psi_{dX} dr\right|^2$$
(2.15)

今回の解析では、この DWBA の解析プログラムは Colorado 大学の Peter Kunz 氏が web 上で公開している、DWBA 解析プログラムを使用した。

^{*2} Y(p,d)Xのような pick-up 反応は個別釣り合いの原理から求めることができる

2.3 PWBA

動径部分の波動関数を

$$R_{nlj}(r) \sim \delta(r - R_0) \tag{2.16}$$

と近似し、歪曲波ではなく平面波として計算すると

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm PWBA} = CS_j |j_l(qR_0)|^2 \tag{2.17}$$

ここで、 $j_l(r)$ は球 Bessel 関数で、q は運動量移行である。*³

2.4 kinematics

詳しくは実験設計の節で説明するが、実験で測定するのはある立体角へ散乱された粒子のエネルギーである。そのエネルギースペクトルから核の励起エネルギーを得ることができる。

今回の実験ではせいぜい 20MeV 程度までの粒子しか扱っていないので、非相対論的近似で充分である。

$$A + a \to b + B + Q \tag{2.18}$$

аが入射粒子で、bが散乱粒子とする。散乱角を θ 、入射エネルギー E_a 、核 B の励起エネルギーを Ex、そして*4

$$A = m_b(m_b + m_B)$$

$$B = m_a v_a m_b \cos \theta$$

$$C = m_a^2 v_a^2 - 2m_B (E_a + Q - \text{Ex})$$
(2.19)

とおくと、粒子 b の速度は

$$v_b = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{2.20}$$

と表せて、

そのエネルギーは

$$E_b = \frac{1}{2}m_b v_b^2 \tag{2.21}$$

なお、符号の正負については、反応前後でのエネルギー保存を満たすように選ぶ。*5

2.5 Bethe-Bloch Formula

組み換え反応を利用するので、数種類の粒子が出てくる。その粒子の識別には、今回は $\Delta E - E$ 法を用いた。その基本となるのが次の荷電粒子の媒質中でのエネルギー損失を導き出す、Bethe-Bloch formula である。*⁶

^{*&}lt;sup>3</sup> とくにこれを Butler 近似とも言う

^{*4} 粒子 b の励起も考慮するべきであるが、今回の実験では粒子 b が励起するようなエネルギー領域ではないので無視する。

^{*5} これらの式の細かい導出については Appendix 参照

^{*6} William R.Leo Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments p.24 参照

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln\left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{\text{max}}}{I^2}\right) - 2\beta^2 \right]$$
(2.22)

各々パラメータの意味については

r_e	電子の古典半径	ρ	ターゲットの密度
m_e	電子の質量	z	入射粒子の電荷
N_a	Avogadro 数	β	入射粒子の速度 v/c
Ι	平均励起ポテンシャル	γ	$1/\sqrt{1-\beta^2}$
Z	ターゲットの電荷	$W_{\rm max}$	一度の衝突での最大エネルギー輸送
A	ターゲットの質量数		

2.6 isospin による選択則

¹⁴N の isospin は $T_0 = 0$ であるから、T = 0, 1 の状態が存在する。基底状態は T = 0 の isoscalar である ので、重陽子のような isoscalar の粒子での非弾性散乱

$${}^{14}N + d \rightarrow {}^{14}N^* + d$$
 (2.23)

においては、反応において isoscalar の粒子のみしか関わらないので isovector の準位は励起しえない。 一方で、陽子や ³He のような T = 1/2 の粒子が関わる反応

$${}^{13}\text{C} + {}^{3}\text{He} \to {}^{14}\text{N}^* + \text{d}$$
 (2.24)

においては、isoscalar,isovector 両方の準位を励起することが可能である。

これは次のようにして分かる。

isospin 固有状態を $|T, T_0\rangle$ とし、2 粒子系の合成を考える。

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} \tag{2.25}$$

その固有状態を $|T, T_0\rangle$ と記すことにする。 まず、 $T^{(1)} = 1, T^{(2)} = 0$ の合成を考えると

$$\begin{cases} |1,1\rangle\rangle &= |1,1\rangle_1 |0,0\rangle_2 \\ |1,0\rangle\rangle &= |1,0\rangle_1 |0,0\rangle_2 \\ |1,-1\rangle\rangle &= |1,-1\rangle_1 |0,0\rangle_2 \end{cases}$$
(2.26)

次に、 $T^{(1)} = 0, T^{(2)} = 0$ の合成は

$$|0,0\rangle\rangle = |0,0\rangle_1|0,0\rangle_2$$
 (2.27)

更に、
$$T^{(1)} = 1/2, T^{(2)} = 1/2$$
では

$$|1,1\rangle = |1/2,1/2\rangle_1 |1/2,1/2\rangle_2$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2,-1/2\rangle_1 |1/2,1/2\rangle_2 + |1/2,1/2\rangle_1 |1/2,-1/2\rangle_2)$$

$$|1,-1\rangle = |1/2,-1/2\rangle_1 |1/2,-1/2\rangle_2$$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2,-1/2\rangle_1 |1/2,1/2\rangle_2 - |1/2,1/2\rangle_1 |1/2,-1/2\rangle_2)$$

(2.28)

これから、

$$|1/2, -1/2\rangle_1 |1/2, 1/2\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle\rangle + |0, 0\rangle\rangle)$$
 (2.29)

と表すことができる。

ここで、今みた反応の粒子の isospin 固有状態は

$^{14}\mathrm{N}$	0,0 angle, 1,0 angle
d	0,0 angle
$^{3}\mathrm{He}$	$ 1/2,1/2\rangle$
$^{13}\mathrm{C}$	$ 1/2,-1/2\rangle$

であるから

$${}^{14}N + d \rightarrow {}^{14}N^* + d$$
 (2.30)

においては、初期状態は

$$|0,0\rangle_1|0,0\rangle_2 = |0,0\rangle\rangle \tag{2.31}$$

¹⁴N* が isovector では終状態は

$$|1,0\rangle_1|0,0\rangle_2 = |1,0\rangle\rangle \tag{2.32}$$

であるから、Wigner-Eckart の定理より isovector への励起がないことが分かる。 一方

$${}^{13}C + {}^{3}He \to {}^{14}N^* + d$$
 (2.33)

においては、初期状態は

$$|1/2, -1/2\rangle_1 |1/2, 1/2\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle\rangle + |0, 0\rangle\rangle)$$
 (2.34)

であるため、終状態の ¹⁴N* が isoscalar

$$|0,0\rangle_1|0,0\rangle_2 = |0,0\rangle\rangle \tag{2.35}$$

isovector

$$|1,0\rangle_1|0,0\rangle_2 = |1,0\rangle\rangle$$
 (2.36)

のどちらでも励起しうることが分かる。

3 実験設計

本実験では isobar の enegy level を測定し isospin 対称性を確認することを目的とする。具体的には、使用 できるビームとそのエネルギーから測定可能なものとして以下の isobar を選び調べた。

Tabl	e.3.1	isobar	list
A=11	$^{11}_5\mathrm{B}$	$^{11}_{6}\mathrm{C}$	
A=13	$^{13}_6\mathrm{C}$	$^{13}_{7}\mathrm{N}$	
A=14	$^{14}_6\mathrm{C}$	$_7^{14}\mathrm{N}$	$^{14}_{8}{ m O}$
A=15	$_7^{15}\mathrm{N}$	$^{15}_{8}{ m O}$	

3.1 反応

上の表の enegy level を測定するために、以下の3つのターゲットを用意した。

- ¹²C (ポリエチレンを使用)
- ¹³C
- ¹⁴N (メラミン樹脂のスポンジを使用)

このターゲットらに 3He,d ビームを当てることで次の反応を調べ、目的の enegy level を測定することにした。

- A=11 $^{-13}C(d, \alpha)^{11}B$ $^{-12}C(^{3}He, \alpha)^{11}C$
- A=13 -¹³C(d, d)¹³C -¹²C(³He, d)¹³N
- A=14 -¹³C(d, p)¹⁴C -¹³C(³He, d)¹⁴N -¹⁴N(d, d)¹⁴N

```
-{}^{14}N({}^{3}He,t){}^{14}O
```

• A=15 -¹⁴N(d, p)¹⁵N -¹⁴N(³He, d)¹⁵O

3.2 beam および加速器

本実験では京都大学北部構内タンデム型バンデグラフ加速器(以下タンデム加速器)Gコースを使用した。 使用した beam の詳細は table3.2 である。ただし intensity については実験中 target や角度に応じて細かく 調整したのでおおよその値である。

Table.3.2 beam

beam	energy(MeV)	intensity(mA)
² Hイオン (deuteron 以下 d)	10	8-20
³ He イオン (以下 ³ He)	18	8-20
$\frac{4}{2}$ He イオン (以下 alpha)	18	8-20

3.3 Set Up

本実験の概要は上記ビームをターゲットに照射し、散乱された粒子のエネルギーとイベント数についても測 定することである。なお実験は二回に分けられ

- 1回目
 - -使用ビーム d 10MeV
 - -日程 07/11/12~11/16
- 2回目
 -使用ビーム 3He 18MeV,alpha 18MeV
 -日程 08/1/21~1/25

である。以下断りがない限り1、2回目のSet Upは同じとする。

3.4 $\frac{dE}{dx}$ 法

3.5 detector とその設置

detector には SSB 2 個を使用した。detector およびターゲット、SetUp については以下の表・図を参照の こと。

Table.3.3 detector							
	シリアルナンバー	厚さ (µm)	有効面積 (mm^2)				
dE	29-264F	28.9	100				
E	28-093H	2000	25				

Table.3.4 target

	組成	膜圧 $\mu g/cm^2$	備考
$1^{12}C$	CH_2	1.663e-3	市販のポリエチレン膜を使用
¹³ C	pure	3.0e-5	膜圧は記載された値
^{14}N	$N_6C_3H_6$	0.987e-3	市販のメラミンスポンジ(密度 8.365mg/cm ³) を切断したものを使用



Fig.3.1 散乱層

なお、counter にはコリメータを設置し立体角をしぼった。target の中心から Ecounter までの距離、コリ メータの直径のサイズ、最終的な立体角は table3.5 参照

Table.3.5	geometry
-----------	----------

実験	E までの距離 (mm)	コリメータ (直径)	dE	E(mm)	立体角 (mm ²)
1回目	152		non	5	8.50e-4
2回目	165		8	5	7.21e-4

3.6 回路

実験の概略図は以下である。

基本的には PreAmp で増幅した dE,Ecounter の信号を ADC で読み取るための回路である。両 counter を 貫通したイベントして E の信号を gate し測定している。そのほかに cross section を得るために FC の電流 値と dE,Ecouter のイベントを Scaler で測定した。



Fig.3.2 回路略図

4 解析

4.1 fitting

実際の実験 data は例えば Fig4.1 である。縦軸が dE、横軸が Ecounter の channel の 2 次元ヒストグラム である。個々の島になっているように見えるのがそれぞれの励起状態である。この peak を切り抜き

- dE,Eの関係より粒子を特定 ($\frac{dE}{dx}$ 法より「実験設計参照」)
- Echannelの l 次元ヒストに project し gaussian で fit
- peak の中心と event 数を得る



Fig.4.1 13 Ctarget d beam 65.9° data

Echannel の 1 次元ヒストに project し gaussian で fit したものの例が Fig4.2,4.3 である。peak が近くひと つに切り分けられないところは複数の gaussian で fit し、また noise が多い data では noise を一次の直線と 仮定し gaussian+noise として fit した。



Fig.4.2 ¹³Ctarget d beam 80.9 gs

Fig.4.3 ¹²Ctarget 60.9

4.2 Calibration

fitting で得た peak の Echannel を energy に直すため、弾性散乱・組み換え反応の ground state の energy を kinematics より計算しその値と fitting の data から calibration を行った (Energy = $C_1 * ch + C_0$)。 calibration は粒子ごとに行い、また d beam,³He beam では module や回路が異なるので calbration も別に 行った。

		d beam	³ He beam					
particle	C_1	$C_1 \ error$	C_0	$C_0 error$	C_1	$C_1 \text{ error}$	C_0	$C_0 error$
р	4.316e-03	3.097e-06	-0.05177	0.009539				
d	4.217e-03	2.331e-05	0.1153	0.04371	7.769e-03	2.499e-05	-0.4736	0.0453
alpha	4.319e-03	9.218e-06	-0.2238	0.02781	7.794e-03	1.928e-05	-0.6525	0.0333

Table.4.1 calibration



Fig.4.6 p (d beam)



Fig.4.5 alpha (d beam)



4.3 excited energy

excited energy の計算では

- 入射粒子の膜圧中での energy loss
- Ex を仮定し反応を計算
- 散乱粒子の膜圧中での energy loss
- dE counter \mathcal{TO} energy loss
- 計算結果と実験結果とを比較
- Ex を調整

を繰り返し excited energy を求めた。膜圧中での energy loss を正確に考慮するため膜圧中での反応が起こっ た位置を変え(10のメッシュに切った)シミュレーションをし、その平均を取り計算結果とした。 誤差の評価には

- 各角度ごとの data の分散
- fittingの誤差(統計誤差)
- 系統誤差
- を考慮した。系統誤差は Pre Amp, Amp, その他の回路, ADC 等に拠るものとして 0.2 %を見込んだ。 以下に結果を示す。

4.3.1 A=11

Table.4.2 A=11

	$11C (^{12}C(^{3}He, alpha)^{11}C))$					$11B (^{13}C(d, alpha)^{11}B)$			
	data 数	Ex	$\operatorname{error}[\operatorname{Mev}]$	文献值	data 数	Ex	$\operatorname{error}[\operatorname{Mev}]$	文献值	
gs	18	-0.094	0.115	0.000	21	-0.002	0.047	0.000	
1st	17	1.905	0.114	2.000	21	2.132	0.053	2.125	
2nd	5	4.334	0.163	4.319	21	4.412	0.069	4.445	
3rd	5	4.820	0.080	4.804	18	4.981	0.045	5.020	
4th	5	6.420	0.090	6.339					



Fig.4.9 A=11

4.3.2	A=13
-------	------

$^{13}N(^{12}C(^{3}He, d)^{13}N)$					$^{13}C(^{12}C(d, p)^{13}C)$			
	data 数	Ex[Mev]	$\operatorname{error}[\operatorname{Mev}]$	文献值	data 数	Ex[Mev]	$\operatorname{error}[\operatorname{Mev}]$	文献值
gs	18	-0.005	0.033	0.000	13	0.003	0.026	0.000
1st	18	2.398	0.040	2.365	13	3.104	0.028	3.089
2nd	18	3.472	0.083	3.502	13	3.689	0.018	3.685
3rd				3.547	13	3.867	0.024	3.854
4th	15	6.338	0.036	6.364	12	6.884	0.044	6.864
5th	7	6.840	0.080	6.886	12	7.525	0.082	7.492
6th	12	7.146	0.047	7.155	7	7.618	0.032	7.547
7th	12	7.370	0.053	7.376				

Table.4.3 A=13

注:¹³Nの 3rd excited state は 2nd と重なってしまい観測できなかった



Fig.4.10 A=13

4.3.3 A	=14
---------	-----

		$^{14}N^{13}C(o$	$(\mathbf{d}, \mathbf{p})^{14}$ C			¹⁴ O		
	data 数	Ex	$\operatorname{error}[\operatorname{Mev}]$	文献值	data 数	Ex	$\operatorname{error}[\operatorname{Mev}]$	文献值
gs	22	-0.012	0.020	0.000				0.000
1 st	22	6.087	0.019	6.094				5.173
2nd	0			6.589				5.920
3rd	22	6.726	0.018	6.728				6.272
4th	21	6.898	0.015	6.903				6.590
5th	13	7.024	0.020	7.012				6.790
6th	21	7.341	0.017	7.341				7.768
$7 \mathrm{th}$	14	8.325	0.014	8.318				8.720

Table.4.4 14C

	$^{14}]$	$N^{13}C(^{3}H)$	$(e, d)^{14}N$		${}^{14}N($	$(d, d)^{14}N$		
	data 数	Ex	$\operatorname{error}[\operatorname{Mev}]$	文献值	data 数	Ex	$\operatorname{error}[\operatorname{Mev}]$	文献值
gs	9	0.014	0.042	0.000	14	-0.010	0.081	0.000
1st	8	2.300	0.053	2.313				
2nd	9	3.924	0.041	3.948	12	3.891	0.042	3.948
3rd	8	4.876	0.039	4.915				
4th	9	5.080	0.039	5.106				
5th	9	5.661	0.034	5.691				
6th	9	5.802	0.033	5.834				
$7 \mathrm{th}$	9	6.219	0.098	6.204				
8th	8	6.416	0.039	6.446				
9th	9	6.986	0.040	7.029				
10th	9	7.999	0.038	8.000				
11th	0			8.062				
12th	9	8.454	0.038	8.490				
13th	5	8.623	0.082	8.618				
14th	9	8.876	0.031	8.777				
15th	6	9.032	0.084	8.907				

Table.4.5 14N

注1:11th state は10th state と縮退

注 2:¹⁴O は ¹⁴N(³He,t)¹⁴O で観測する予定だったが cross section が小さく見えなかった(グラフは文 献値)

4.3.4	A=15
-------	------

$^{15}N^{14}N(d,p)^{15}N$						¹⁵ (C	
	data 数	Ex[Mev]	$\operatorname{error}[\operatorname{Mev}]$	文献值	data 数	$\operatorname{Ex}[\operatorname{Mev}]$	$\operatorname{error}[\operatorname{Mev}]$	文献值
gs	14	0.014	0.013	0.000				0.000
1st	7	5.287	0.011	5.270				5.183
2nd	6	5.285	0.027	5.299				5.241
3rd	14	6.328	0.085	6.324				6.176
4th	14	7.139	0.019	7.155				6.793
5th	14	7.288	0.018	7.301				6.859
6th	14	7.569	0.012	7.567				7.276
$7 \mathrm{th}$	10	8.330	0.036	8.313				7.557
8th	3	8.574	0.035	8.571				8.284
9th	1	9.059	0.024	9.050				8.744
10th	2	9.163	0.037	9.152				8.922

Table.4.6 15N

注: ¹⁵O は ¹⁴N(³He,d)¹⁵O で観測する予定だったが実験の不手際 (gate がずれていた) のため有意な結果 を得られなかった(グラフは文献値)



Fig.4.11 A=14



Fig.4.12 A=15

4.4 isoscalar 準位と isovector 準位の解析

4.4.1 isovector 準位の特定

¹⁴N について、二種類の反応を使って準位を解析した結果、次のような結果となった。

	$^{14}\mathrm{N}(\mathrm{d},\mathrm{d})^{14}\mathrm{N}$	${\rm ^{13}C(^{3}He,d)^{14}N}$
\mathbf{gs}	0	0
1st	×	0

つまり、¹⁴N(d,d)¹⁴N による非弾性散乱において、第一励起状態への励起は禁止されているのが分かる。 これは、isospin による選択則であり、理論面において述べたように isoscalar のみが関わる非弾性散乱では isovector の準位を励起することが出来ない。したがって、¹⁴N の第一励起状態は isovector(T = 1)の状態で あると結論することができる。

4.4.2 第一励起準位以外の isovector 準位について

文献値を参考にすると ¹³C(³He, d)¹⁴N において励起した 11th,13th,14th,15th の準位は isovector である が、10MeV の重陽子ではエネルギー的に励起は不可能である。

そこで、第二回の実験において 18MeV の α 粒子をつかってこの高励起 isovector の探索に挑戦したが、後 述するように melamine スポンジのターゲットとしての問題点である揺らぎの大きさから、散乱粒子のエネル ギー揺らぎが非常に大きく、励起準位を分離することは不可能であったため、これらの isovector 準位の特定 は不可能であった。

4.5 微分断面積

4.5.1 微分断面積の計算

微分断面積の計算に必要な情報は散乱粒子数 (Y)、入射粒子数 (I)、標的粒子数 (N)、および立体角 ($d\Omega$) である。それら関係は、以下のようになっている。

$$Y = I \cdot N \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot d\Omega \tag{4.1}$$

4.5.2 微分断面積の誤差評価

微分断面積の誤差には次の4つの要素がある。

- 1. 散乱粒子数 (Y)
- 2. 入射粒子数 (I)
- 3. 標的数 (N)
- 4. 立体角 (dΩ)
- それぞれ、順に見ていく
- 1. 散乱粒子数 (Y)

散乱粒子数は統計的揺らぎにより √Y 程度の誤差がでる。

2. 入射粒子数 (I)

入射粒子数は FC のところで測定された電荷として見るが、 10^{10} [C] を 1pulse として、各々の測定において最低 1000pulse 以上は測定しているので、 $\Delta I/I < 10^{-4}$ のオーダーである。

3. 標的数 (N)

• CH_2

面密度の測定には電子天秤を使用して測定した。具体的な測定結果は (1.6714 ± 0.1046) × 10^{-3} g/cm² である。

• ¹³C

すでに蒸着された状態で使用したので、面密度の直接の測定はできず、また通過粒子のエネルギー 損失で調べたくても非常に薄い (30µg/cm²) であるため、有意に測定できるエネルギー損失はない ため、正確な面密度は測定できない。

ただし、同一角度を複数測定したデータがあったので、それを利用して揺らぎを評価すると $30 \pm 1 \mu g/cm^2$ であることが分かった。

• メラミン

詳しくは、後ほど述べるが、スポンジのままで十分に低密度であったために、標的を薄くスライス するだけで使用したのだが、スポンジであったために面密度の揺らぎが非常に大きく、断面積の解 析には実験データを使用することができなかった。

4. 立体角 (dΩ)

立体角の誤差には様々な要因が重なってくる。それを順におって見ていく。

(a) 距離の測定による誤差

検出器までの距離の測定は l = 152mm, 165mm および、コリメータの直径は d = 5.0mm であっ

たので

$$\frac{\Delta d\Omega}{d\Omega} \Big| \sim \Big| 2 \frac{\Delta d}{d} \Big| + \Big| 2 \frac{\Delta l}{l} \Big| \sim 5 \times 10^{-2}$$
(4.2)

のオーダーである。

(b) ビームの広がりによる誤差

rを検出器の半径、 r_b をビームの広がりとする。



Fig.4.13 ビームの広がりによる立体角誤差

この図から

$$\frac{r_b}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \alpha\right)} \tag{4.3}$$

ここで、 $\alpha \ll 1$ であるから

$$\alpha \sim \frac{r_b}{R} \cos \theta \tag{4.4}$$

更に、 $\theta < \pi/3$ であるから

$$\frac{r_b}{R} > \alpha > \frac{r_b}{R} \frac{1}{2} \tag{4.5}$$

である。 一方、立体角の誤差は

$$\left|\frac{\Delta d\Omega}{d\Omega}\right| = \left|\frac{1/R^2 - 1/R'^2}{1/R^2}\right|$$

$$\sim \frac{r_b}{R}$$
(4.6)

具体的なパラメータは r = 2.5[mm], R = 152[mm], 165[mm], $r_b \simeq 1$ [mm] であるから、

$$\alpha \sim 0.0067 [\text{rad}] \sim 0.4 [\text{deg}] \tag{4.7}$$

および

$$\left|\frac{\Delta d\Omega}{d\Omega}\right| \sim \left|2\frac{\Delta d}{d}\right| + \left|2\frac{\Delta l}{l}\right| \sim 5 \times 10^{-3} \tag{4.8}$$

のオーダーである。

4.5.3 第一回実験における¹³C ターゲットの問題点

第一回実験終了後に¹³Cターゲットが破れていてホルダーから外れかかっていたことが発覚した。具体的 にいつターゲットが破れたのかは確かではないが、散乱槽に設置する段階が一番可能性がある。 これにより、エネルギースペクトルには問題はないが、断面積の解析において問題が発生した。 次の微分断面積のグラフを見れば分かるように 60 度において非常に大きな不連続性が存在している。





60 度の二つのデータはそれぞれターゲットラダーを 45 度回転した前後のものである。膜厚が通常ならば √2 の補正であるはずが、このデータの場合はむしろ 1/2 の膜厚の補正を回転後に加えないと整合性がとれな い。*⁷つまり、見掛け上では 45 度ラダーを回転した場合において膜厚が減っている。この 60 度における回転 前後の膜厚補正は他の組み換え反応においても同じであった。

このことから、おそらくターゲットがビームにたなびいていた状態で測定した可能性が高いと考えられる。 したがって、第一回実験における¹³Cターゲットについては断面積は全体的にその絶対値について数倍の誤

^{*7} このグラフではすでに √2 倍の補正を行っている

差がある可能性があるが、ただし、膜厚自体への補正であるため、60度のデータを使用して補正す角度分布 については問題ないと思われる。

4.5.4 メラミンスポンジの面密度の揺らぎについて

微分断面積の関係より、散乱粒子数 Y と入射粒子数 I および、標的粒子数 N の間には

$$Y/I \propto N \tag{4.9}$$

の関係が成り立つ。メラミン中と CH₂ 中の ¹²C(d, p)¹³C 反応*⁸のイベント数および、p(d, p)d 反応のイベント数についてこの比を比較してみると、N_{CH₂}^(C)/N_{melamine}^(C) = 1.47 ± 0.72 となり、非常に大きな揺らぎがあるのが分かる。

また、p(d,p)dについても同様に調べてみると、 $N_{CH_2}^{(H)}/N_{melamine}^{(H)} = 10.9 \pm 3.2$ となった。

以上のことから、メラミンスポンジの面密度の揺らぎは非常に大きく、断面積の情報は揺らぎすぎるため有 意なデータではない。

^{*8&}lt;sup>12</sup>C(d,d)¹²C 反応のほうでは、¹⁴N(d,d)¹⁴N との分離が不完全であったので、多少イベント数は小さくなるが組み換え反応を 利用して比較した。

4.6 DWBA による角運動量移行の決定

4.6.1 光学ポテンシャル

光学ポテンシャルとして

$$U(\mathbf{r}) = -Vf(x_R) - i\left[W_v f(x_v) + 4W_s g(x_s)\right] - \left(\frac{\hbar}{m_\pi c}\right)^2 \left[V_{so}\frac{1}{a_{vso}r}g(x_{vso}) + iW_{so}\frac{1}{a_{wso}r}g(x_{wso})\right] \ell \cdot \sigma + V_C(r)$$

$$\tag{4.10}$$

ただし

$$f(x) = (1 + e^x)^{-1}$$

$$g(x) = -\frac{df}{dx}$$

$$x_i = (r - R_i)/a_i$$
(4.11)

を使用した。こまかいパラメータは朝倉物理学体系 19「原子核反応論」をもとにし、誤差が最小となるよう に設定した。

4.6.2 DWBA 解析における問題点

微分断面積の解析だけでは全角運動量 $(j = l \pm 1/2)$ を決定することが困難で、確定できるのはせいぜい軌 道角運動量 (l) に限られる。全角運動量を決定するためには、散乱粒子の偏極を測定する必要があるが、今回 の実験においてはそこまでの準備ができていなかったため、全角運動量の決定は不可能である。

さらに問題なのは次の点である。それは、DWBAの解析において重要な要素である光学ポテンシャルであ るが、これは弾性散乱の微分断面積の解析により得ることができるが、歪曲波は入射波と放出波の二種類につ いて考えなければならない、したがって、放出チャンネルの弾性散乱の解析もするのが望ましいが、今回の実 験においてそれは無理であった。したがって、放出チャンネルの光学ポテンシャルは結局文献値などを参考に するしかなく、その部分の不定性が大きくなってしまい、高精度の解析ができなかった。

そのために、ごく限られた核の状態にのみにしか DWBA の解析は行うことができず、望んでいた核構造の 類似性を DWBA 解析による角運動量移行の観点から確認するということはできなかった。

4.6.3 A=13 同重核の基底状態の解析

解析に使用した反応は

$${}^{12}C(d, p){}^{13}C$$

 ${}^{12}C({}^{3}He, d){}^{13}C$ (4.12)

である。







Fig.4.16 $^{12}C(d, p)^{13}C$, ground state, DWBA



誤差は大きいがおおまかなピークの再現性などから角運動量移行*l*=1と考えることができる。

Fig.4.17 $^{12}C(^{3}He, d)^{13}N$, ground state



Fig.4.18 $^{12}C(^{3}He, d)^{13}N$, ground state, DWBA

誤差は大きいがおおまかなピークの再現性などから角運動量移行*l*=1と考えることができる。

4.6.4 A=14 同重核の基底状態の解析

解析に使用した反応は

$${}^{13}C(d,p){}^{14}C$$

 ${}^{13}C({}^{3}He,d){}^{14}N$ (4.13)

である。



 $Fig.4.19 \quad {}^{13}C(d,p){}^{14}C, \ ground \ state$



Fig.4.20 $^{13}C(d, p)^{14}C$, ground state, DWBA

多少の誤差はあるが、角運動量移行 l=1と考えることができる。

次に、¹⁴N ではあるが、これは基底状態は isoscalar で第一励起状態が isovector であるので、基底状態は IAS になり得ない。



Fig.4.21 $^{13}\mathrm{C}(^{3}\mathrm{He,d})^{14}\mathrm{N},$ ground state, isoscalar



Fig.4.22 ${}^{13}C({}^{3}He, d){}^{14}N$, ground state, isoscalar, DWBA

これから、角運動量移行 l = 1 と考えることができる。



Fig.4.23 ${}^{13}C({}^{3}He, d){}^{14}N$, 1st excited state, isovector



Fig.4.24 $^{13}\mathrm{C}(^{3}\mathrm{He,d})^{14}\mathrm{N},$ 1st excited state, isovector, DWBA

おおざっぱな、角度分布の再現性から、角運動量移行1=1と考えることができる。

4.6.5 DWBA **解析の結果**

反応	角運動量移行
$^{12}\mathrm{C}(\mathrm{d},\mathrm{p})^{13}\mathrm{C},\!\mathrm{gs}$	l = 1
$^{12}C(^{3}He,d)^{13}N,gs$	l = 1
$^{13}\mathrm{C}(\mathrm{d},\mathrm{p})^{14}\mathrm{C,gs}$	l = 1
${\rm ^{13}C(^{3}He,d)^{14}N,gs}$	l = 1
$^{13}{\rm C}(^{3}{\rm He},{\rm d})^{14}{\rm N},\!1{\rm st}$	l = 1

DWBAの解析の精度については疑問が残るが、ここで調べた核反応についてはすべて p 殻へと核子が移行 した反応と考えることができ、¹³C と ¹³N の基底状態同士、および ¹⁴C の基底状態と ¹⁴N の基底状態および 第一励起状態の核構造の類似性が見ることが出来る。

4.7 断面積の直接の比較による、類似性の確認

理論面のところで述べたように、実は DWBA で解析するまでもなく、角運動量移行については微分断面積 の角度依存性の比較により、その類似性を確認することができる。

なお、微分断面積はそれぞれ適当な大きさに揃えて比較している。





Fig.4.25 ${}^{12}C(d, p){}^{13}C, {}^{12}C({}^{3}He, d){}^{13}N$, ground state



 ${}^{12}C(d,p){}^{13}C$ の低角度の断面積の角度分布が ${}^{12}C({}^{3}He,d){}^{13}N$ の角度分布に類似しているのが分かる。

4.7.2 A=14



このグラフでは¹⁴Cの基底状態と、¹⁴Nの isoscalar 準位の基底状態および、isovector 準位の第一励起状態 について比較してある。

¹⁴Nの基底状態および第一励起状態の断面積の角度分布が非常に類似したものであるのが分かる。

4.8 微分断面積の運動量移行分布の比較

微分断面積を同じ角度ごとで比較するだけでも、ある程度の類似性は見て取れたが、運動量移行について比 較してみるとよりはっきりとした、類似性を見ることが出来る。

4.8.1 A=13



 ${\rm Fig. 4.28}^{-12}{\rm C(d,p)^{13}C, ^{12}C(^{3}{\rm He,d})^{13}N, \, ground \; state}$



Fig.4.29 ${}^{12}C(d, p){}^{13}C, {}^{12}C({}^{3}He, d){}^{13}N, 1st$ excited state

断面積の運動量移行分布で見てみると分かるように、どちらもほぼ同じ運動量移行においてピークを形成しているのが分かる。したがって、DWBAによる解析よりもよりはっきりとした角運動量移行の類似性をみることができる。

4.8.2 A=14



このグラフでは¹⁴Cの基底状態と、¹⁴Nの isoscalar 準位の基底状態および、isovector 準位の第一励起状態 について比較してある。これらの断面積の運動量移行分布は非常によい類似性をしめしており、この3つの反 応がすべて同じ角運動量移行であると考えることが出来る。

5 総括

以上、原子核の核構造の類似性を調べるために

- 励起エネルギー
- 角運動量移行

という観点により、実験解析を行った。

実験の不手際や見通しの甘さや力不足から、当初の予定していたほどの結果は得られなかった。 具体的にいくつか列挙すると

実験の不手際

アンプの調整不足により実験データを半分近く失ったり、ADCの故障をはじめ DAQ の設定には非常 に悩まされた。また、ノイズ落としや散乱槽内部に設置したケーブルの調整に真空解除を何度もするな ど、時間のロスがとても多かった。

● (³He, t) 反応の測定の失敗

この反応は当然ながら核子を二つもやりとりするわけであるから、非常に反応断面積が小さい。結局のところノイズなどに紛れて測定する事が出来ず、本来の予定であった¹⁴Oを測定することによりA=14,isotripletを完成する事が出来なかった。

• DWBA 解析

光学ポテンシャルの探索に失敗したことに尽きる。Kunz 氏のプログラムを組み込んで光学ポテンシャ ル探索プログラムを作成し、入射波については探索したのであるが、思ったような精度で求めることが できなかった。また、様々な文献から値を参照したのだが、充分なデータが見つからず、非常に中途半 端な結果になってしまったのは残念である。

それでも A=11,13,14 の isomultiplet の励起エネルギーの類似性および、A=14 の isovector, isosclar の準 位の解析。角運動量移行という観点からは DWBA の解析は不十分であったが、断面積の運動量移行分布の比 較により A=13,14 の基底状態、および第一励起状態についての反応の類似性を確認する事が出来た。

特に、この断面積の単純な比較というのは盲点であり、発表会において指摘されるまで気づかなかった。 最後に、P3メンバーを実験面で指導してくださった谷田先生、理論面で指導してくださった菅沼先生には 本当に至らないことばかりで迷惑をかけて申し訳ありませんでした。

6 参考文献

- 1. 八木浩輔「原子核物理学」基礎物理科学シリーズ4 (朝倉書店、1971)
- 2. 河合光路、吉田思郎「原子核反応論」朝倉物理学大系19(朝倉書店、2005)
- 3. William R.Leo. Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments Springer-Verlag, 1987
- 4. Samuel S.M.Wong. *INTRODUCTORY NUCLEAR PHYSICS* Prentice-Hall International Editions. 1990
- 5. B. ポッフ,K. リーツ,C. ショルツ,F. サッチャ, 訳 柴田利明「素粒子・原子核物理入門」(シュプリン ガー・フェアラーク,1997)
- 6. C.P.Pearson, J.M.Covan, D.Zissermann, Nucl. Phys. A191(1972)1
- 7. Peter.D.Kunz, DWBA Page for Peter D.Kunz (http://spot.colorado.edu/ kunz/DWBA.html)
- 8. National Nuclear Data Center (http://www.nndc.bnl.gov/)

7 APPENDIX

7.1 Kinematics の計算

A(a,b)B 組み換え反応について、非相対論的に計算する。

$$A + a \to b + B + Q \tag{7.1}$$

エネルギー保存則から

$$E_a + Q = E_b + E_B \tag{7.2}$$

運動量保存則から

$$m_a v_a = m_b v_b \cos \theta + m_B v_B \cos \psi$$

$$0 = m_b v_b \sin \theta - m_b v_B \sin \psi$$
(7.3)

ここで、Ex を励起エネルギーとして

$$E_b = \frac{1}{2}m_b v_b^2$$

$$E_B = \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \text{Ex}$$
(7.4)

これを計算すると

$$\frac{1}{2}m_a v_a^2 + Q - \text{Ex} = \frac{1}{2}m_b v_b^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2$$
(7.5)

$$m_B^2 v_B^2 = (m_a v_a - m_b v_b \cos \theta)^2 + (m_b v_b \sin \theta)^2$$
(7.6)

$$m_B \times (E_a + Q - \text{Ex}) = \frac{1}{2} m_b m_B v_b^2 + \frac{1}{2} (m_a^2 v_a^2 - 2m_a v_a m_b v_b \cos \theta + m_b^2 v_b^2)$$
(7.7)

$$Av_3^2 - 2Bv_3 + C = 0 \tag{7.8}$$

次のように定義する

$$A = m_b(m_b + m_B)$$

$$B = m_a v_a m_b \cos \theta$$

$$C = m_a^2 v_a^2 - 2m_B (E_a + Q - \text{Ex})$$
(7.9)

$$v_b = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{7.10}$$

最終的には

$$E_b = \frac{1}{2}m_b v_b^2 \tag{7.11}$$

符号の正負については、反応前後でのエネルギー保存を考えて

$$E_a + Q = \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \text{Ex} + E_b$$
(7.12)

が満たされるようにする。ここで

$$\frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2m_B} \left(2m_a E_a + 2m_b E_b \right) - \frac{\sqrt{2m_a E_a} \sqrt{2m_b E_b}}{m_B} \cos\theta \tag{7.13}$$



Fig.7.1 A(a,b)B

7.2 Lab 系から CM 系への変換

A(a,b)B のような組み換え反応の場合、Lab 系から CM 系への変換は多少込み入った計算となる。以下に その導出を行う。

$$A + a \to b + B + Q \tag{7.14}$$

ここでは、便宜上 Lab 系での量を小文字、CM 系での量を大文字で記述する。



Fig.7.2 Lab-system,CM-System



Fig.7.3 angle:cm to lab

グラフより

$$(V_b \cos \Theta + V_G) \cdot \tan \theta = V_b \sin \Theta$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \Theta}{\gamma + \cos \Theta}$$
(7.15)

ここで

 V_G は重心の速度

CM 系でのエネルギーは

$$\gamma = \frac{V_G}{V_b} \tag{7.16}$$

$$V_G = \frac{m_a}{m_a + m_A} v_a \tag{7.17}$$

$$E_{\rm CM} = \frac{1}{2}m_a V_a^2 + \frac{1}{2}m_A V_A^2 \tag{7.18}$$

ここで、

$$V_{a} = v_{a} - V_{G} = \frac{m_{A}}{m_{A} + m_{a}} v_{a}$$

$$V_{A} = 0 - V_{G} = -\frac{m_{a}}{m_{A} + m_{a}} v_{a}$$
(7.19)

したがって

$$E_{\rm CM} = \frac{m_A}{m_A + m_a} \frac{1}{2} m_a v_a^2$$

$$\therefore E_{\rm CM} = \frac{m_a}{m_A + m_a} E_{\rm Lab}$$

$$\therefore E_{\rm CM} = \frac{1}{2} \frac{m_A (m_A + m_a)}{m_a} V_G^2$$
(7.20)

反応後のエネルギーは

$$E_{\rm CM} + Q - \mathrm{Ex} = \frac{1}{2}m_b V_b^2 + \frac{1}{2}m_B V_B^2$$
(7.21)

CM 系であるから

$$m_b V_b = m_B V_B \tag{7.22}$$

$$E_{\rm CM} + Q - E_{\rm X} = \frac{1}{2} \frac{m_b (m_b + m_B)}{m_B} V_b^2$$
(7.23)

Q-value の定義から

$$Q = (m_a + m_A) - (m_b + m_B)$$

$$\frac{m_b + m_B}{m_a + m_A} = 1 - \frac{Q}{m_a + m_A} \simeq 1$$
(7.24)

結局

$$\therefore \gamma = \frac{V_G}{V_b} = \sqrt{\frac{m_a m_b}{m_A m_B} \frac{E_{\rm CM}}{E_{\rm CM} + Q - \rm Ex}}$$
(7.25)

なお、CM 系での角度は

$$\Theta = \theta + \sin^{-1}(\gamma \sin \theta) \tag{7.26}$$

で計算する事が出来る。

断面積の変換は

$$\begin{pmatrix} \frac{d\sigma}{d\Omega} \end{pmatrix}_{\rm CM} = \frac{d(\cos\theta)}{d(\cos\Theta)} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\rm Lab}$$

$$= \frac{|1 + \gamma \cos\Theta|}{1 + 2\gamma \cdot \cos\Theta + \gamma^2)^{3/2}} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\rm Lab}$$
(7.27)