

Q M -alternating tree による 2部最大マッチング・アルゴリズムを
 プログラムとして実装せよ。
 考えるべきポイント:

- ・グラフのデータ構造 $\rightarrow$ 隣接リスト
- ・bfs とその反復 bfs の変形
- ・解(マッチング M)の表現

2部グラフの最大重みマッチング

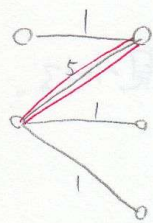
- 問題設定

Max-Weight Bipartite Matching

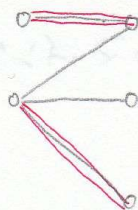
入力: (無向) 2部グラフ $G=(X \cup Y, E)$, $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$

出力: G のマッチング M s.t. $\sum_{e \in M} w(e) \rightarrow \text{最大}$

ex.



MWBM



BM

・様々な変形

Fact: MWBM に対して、その入力となるグラフを

完全 2部グラフ $K_{n,n}$ に限定しても一般性を失わない。

① $|X| \neq |Y|$ ($|X| < |Y|$) のとき、 $|X| = |Y|$ となるように、 Y のグラフ G の
 X に点を加える。

・枝を加える。すべて $\{x_i, y_i\}$ の間に枝を加え、
 その重みを 0 とする $\rightarrow G'$ 。

このとき

Obs. G の最大重み(2部)マッチング $\rightarrow G'$ の最大重み(2部) 完全マッチング

最大重み 完全マッチング (MW BPM)

入力: 完全 2部グラフ $K_{m,n}$, $w: E(K_{m,n}) \rightarrow \mathbb{R}^+$

出力: 完全マッチング M s.t. $\sum_{e \in M} w(e) \rightarrow \max$

→ これを
割り当て問題 (assignment problem)
多くの効率的なアルゴリズムが
考案されている。

Fact: 次の問題も MW BPM と等価

最小重み 2部完全マッチング

入力: 同じ

出力: 同じ s.t. $\sum_{e \in M} w(e) \rightarrow \min$

- ①: 十分大なる重み W を用い, $w(e) = W - w(e)$ とする
あるいはすべての重みの符号を逆にする。

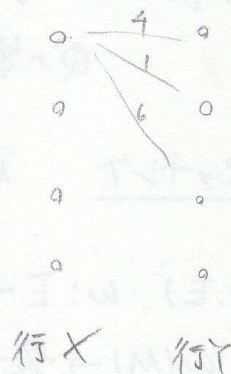
Fact: 次の問題も 等価

Matrix Transversal

I : $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \geq 0, \forall (i, j)$

O : 各行、列から 1 要素ずつ選ぶ、その和を最大

ex. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \textcircled{6} & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & \textcircled{7} & 6 \\ \textcircled{2} & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & \textcircled{4} & 6 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 8 & \textcircled{6} \end{pmatrix}$ $\Sigma = 25$



2部最大マッチング

複数問の相対的な難し士の比較

帰着 (reduction)

・ われわれには、様々な問題 P を解くための、色々な効率的アルゴリズム A_p の蓄積がある。

SORT
 2部最大マッチング
 ...

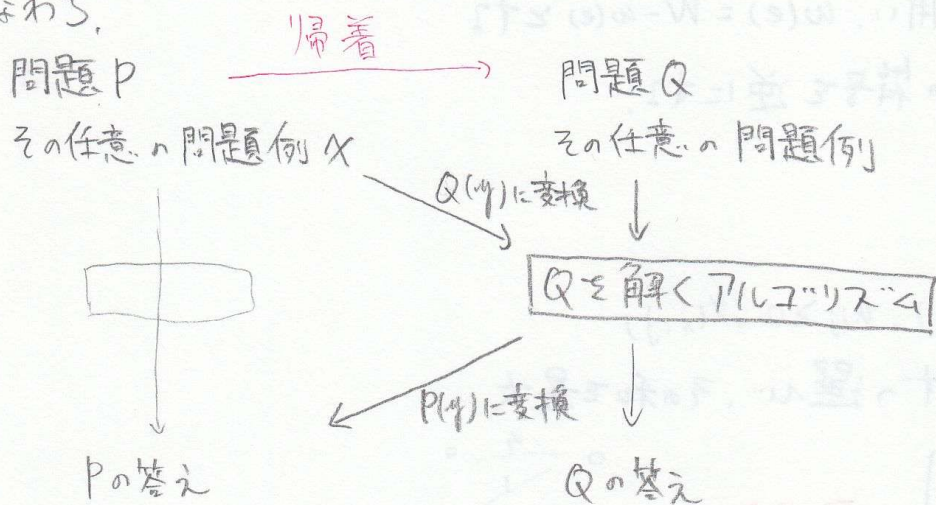
クイックソート
 交互路木による bfs
 ...

・ いま新しく解きたい問題 P を手にして

専用アルゴリズムを最初から考案するより、

既存アルゴリズムで解ければ生産性が高い。

すなわち、



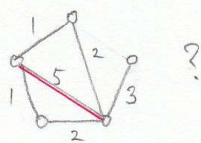
一般のグラフの最大重みマッチング MWM

問題設定

I : (無向) グラフ $G = (V, E)$, $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,

O : マッチング M s.t. $w(M) \rightarrow \text{最大}$

ex.



※ 効率的なアルゴリズムが存在する問題としては最も複雑な部類に属する。

Q この問題が MWP と等価であることを示せ
(最大重みマッチング)

等価とは? $P \leq Q$

$P \geq Q$

MW BPM $\leq$ MT