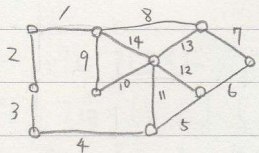


A12

(数字は枝の番号を示す。)



$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 12, 10, 9\} \quad Y = \{6, 7, 8, 9, 10, 12\} \leftarrow \text{閉路}$$

$$X \Delta Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \leftarrow \text{閉路}$$

(閉路を表す)

枝集合 X, Y に対して $X \Delta Y$ は X, Y のどちらか一方にのみ属する枝の集合といえる。

$X \cap Y = \emptyset$ のときは $X \Delta Y = X \cup Y$ なので、 $X \Delta Y$ は 2つの閉路の集合となり成立。

$X \cap Y \neq \emptyset$ のとき、すなわち X と Y がいくつかの路(長さ1も含めて)を共有している場合を考える。

$X \Delta Y$ ではこれら共有されている路はすべて無くなるため、このことにより閉路であることが保たれるか否かが問題である。このとき、共有されている路の始点と終点は X と Y がともに共有しており、この始点から X の枝を順に巡っていくと(X が閉路より)終点に巡り着く。またこの終点から Y の枝を順に巡っていくと(Y が閉路より)始点に巡り着く。これは X と Y が共有する路を除いても、それ以外の枝が閉路を作ることの意味する。共有されている路が複数あっても、その任意の路の始点から X を巡るとどこかで Y と共有する点に巡りつき、そこから Y を巡ることで始点に戻るため、 $X \Delta Y$ は閉路の集合となる。

共有されている路が1本の際の議論 $\rightarrow$ 2本以上は?

これも示す!

これも同様。「観念」で証明する。

A19 対、現在最速の SSSP を解くアルゴリズムはダイクストラ法であり、データ構造にフィボナッチヒープを用いることで $G=(V, E)$ に対し計算時間量 $O(|E| + |V| \log |V|)$ で実現できる。これをさらに改善可能なかどうかを考える。ここで、ソートの問題が SSSP に帰着できる (SORT $\hookrightarrow$ SSSP) という事実を用いることで、SSSP を解くアルゴリズムが SORT を解く「最速のアルゴリズム」よりも速くはできないということがわかる。SORT を解くアルゴリズムは n 要素に対し $O(n \log n)$ より速くできないという事実と、実際に $O(n \log n)$ で解くアルゴリズムが存在することから、SSSP を解くアルゴリズムは $O(n \log n)$ まで改善できる可能性がある。

スターリングの公式 ($n! = O(n^n)$) を用いて波線部を証明する。まず n 個の要素の置換は $n!$ 種類存在するのでスターリングの公式より $O(n^n)$ 種類とできる。プログラム中で λ 木替え操作が起こる回数が計算時間量と考えられるのでこれを m とする。 λ 木替えは起こるか起こらないかで2つに分岐するので 2^m は(最悪の事態を想定して)置換の全種類以上でなければならぬ。すなわち $2^m \geq n!$ が成り立ち、 $2^m \geq O(n^n)$ となるべきである。後者の両辺を底2の対数を取ることによって $m \geq \log O(n^n)$ となり、 $m = O(\log n^n) = O(n \log n)$ となる。Q.E.D