

思考の過程を採点します。解答に至るまでの考え方もわかりやすく示すこと。

※ 配点は予定あるいは目安です。変更の可能性があります。

問題 1 (10 点)

グラフ G の 2 つの閉路 C と C' に対して, $C \Delta C'$ は閉路の集合に分解される (互いに素な閉路の和集合になる) ことを証明せよ。ただしここでは, 閉路は枝集合で表されているものとする。

問題 2 (15 点)

ネットワーク N を有向グラフ $G = (V, E)$, 始点 (入口) s , 終点 (出口) t , および容量関数 $c : E \rightarrow [0, \infty]$ による $N = (G, s, t, c)$ で定義する。

このとき, ネットワーク N におけるフロー f が最大であるための必要十分条件は, N における f の残余ネットワーク R_f が増加路をもたないことであることを証明せよ。



問題 3 (25 点)

無向グラフ $G = (V, E)$ と枝長 (距離関数) $\ell : E \rightarrow \mathbf{R}^+$ が与えられたとき, 枝長の和が最大になる単純路 P の長さを求める問題 (最長路問題) を考える。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 最長路問題をよく説明する小さな入力例, およびその入力例に対する最長路問題の解を示せ。
- (2) いま入力となるグラフが n 点からなるサイクル C_n である場合を考える。このとき, この問題を効率的に解くアルゴリズムを設計し示せ。またそのアルゴリズムの最悪時間計算量を求めよ。
- (3) いま入力となるグラフが n 点からなるサイクル C_n であり, さらに枝長が $\ell : E \rightarrow \mathbf{R}$ (非負とは限らない実数) であるとする。このとき, この問題を解くアルゴリズムを設計し示せ。アルゴリズムやそのアイデアの記述の様式は問わない。アルゴリズムの記述とともに, その正当性 (証明あるいはアイデアの正しさ), 自作の例題に対する動作例, 実装時に用いるデータ構造, 最悪時間量の解析などが評価の対象となる。

