

問4. 1

(1)

(F8)を満たさないので反例を挙げる.

$a = 2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対する逆元を考えると, a に $\mathbb{Z}$ 中の何を掛けても 2 の倍数にしかならないので, 1 になることはない.

また, (F5) の単位元は 0, (F6) の単位元は 1, (F7) の逆元は 0.

(2)

(F2) の積のほうを満たさないので反例を挙げる.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ とすると, $A, B \in GL(2, \mathbb{R})$ であるが,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -11 & 7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = BA \text{ である.}$$

また, (F5) の単位元は零行列, (F6) の単位元は単位行列, (F7) の逆元は $-A$, (F8) の逆元は逆行列.

(3)

(F2), (F3), (F4) は自明.

$a = a_1 + a_2\sqrt{2}, b = b_1 + b_2\sqrt{2} \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q})$ として他を示す.

(F1)

$$a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$a \cdot b = (a_1b_1 + 2a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

(F5)

$a_1 = 0, a_2 = 0$ のとき, $a = 0$.

(F6)

$a_1 = 1, a_2 = 0$ のとき, $a = 1$.

(F7)

$b_1 = -a_1, b_2 = -a_2$ のとき, $b = -a$.

(F8)

$(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ のとき,

$$a^{-1} = \frac{a_1}{a_1^2 - 2a_2^2} - \frac{a_2}{a_1^2 - 2a_2^2}\sqrt{2}$$

$\sqrt{2}$ が有理数でないから, $a_1^2 - 2a_2^2 \neq 0$

(4)

(F2), (F3), (F4) は自明.

(3) より, (F5), (F6), (F7) も正しいことがわかる.

(F5) の単位元は 0, (F6) の単位元は 1, (F7) の逆元は $-a$.

$a = a_1 + a_2i, b = b_1 + b_2i \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q})$ として他を示す.

(F1)

$$a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i \in \mathbb{Q}(i)$$

$$a \cdot b = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \in \mathbb{Q}(i)$$