

(G3)より, $a^{-1} \in H$.

もし, $a^{-1} = 1$ ならば, $a = a \cdot 1 = a \cdot a^{-1} = 1$ となり, 矛盾.

$\therefore a^{-1} = a$.

(1)より, $a = 4, 11, 14$.

よって, $H = \{1, 4\}, \{1, 11\}, \{1, 14\}$.

$|H| = 4$ のとき, $H = \{0, b, c, d\}$.

???

よって, $H = \{1, 4, 11, 14\}$.

$|H| = 4$ のとき, $H = Z_{15}^{\varphi}$.

???の部分は, 理解不足で解答が思いつかなかった部分です. ご自身で1度考えてみて下さい.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	2	4	6	8	10	12	14	1	3	5	7	9	11	13
3	3	6	9	12	1	4	7	10	13	2	5	8	11	14
4	4	8	12	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11
5	5	10	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11	15
6	6	12	3	10	4	11	1	13	7	1	14	4	12	8
7	7	14	5	1	11	2	13	4	1	15	8	6	1	10
8	8	1	7	11	2	13	4	1	15	8	6	1	10	15
9	9	3	9	12	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7
10	10	4	11	1	9	13	2	6	10	14	3	7	11	15
11	11	5	12	2	10	1	13	4	1	15	8	6	1	10
12	12	6	1	3	11	3	1	15	8	6	1	10	15	15
13	13	7	2	4	1	4	1	15	8	6	1	10	15	15
14	14	8	3	5	2	5	2	15	9	1	11	2	13	4
15	15	9	4	6	3	6	3	15	10	2	12	3	1	5