

もし、 $a^{-1} = 1$ ならば、 $a = a \cdot 1 = a \cdot a^{-1} = 1$ となり、矛盾。

$$\therefore a^{-1} = a.$$

(1)より、 $a = 4$.

よって、 $H = \{1, 4\}$.

$$|H| = 4 \text{ のとき, } H = \mathbf{Z}_5^*.$$

問3. 9

部分群を H とする.

$$H \leq \mathbf{Z}_8 \text{ より, } |H||\mathbf{Z}_8| = 8.$$

$\therefore |H| = 1, 2, 4, 8$. また、単位元は $0 \in H$.

$$|H| = 1 \text{ のとき, } H = \{0\}.$$

$$|H| = 2 \text{ のとき, } H = \{0, a\}.$$

(G3)より、 $-a \in H$.

もし、 $-a = 0$ ならば、 $a = a + 0 = a + (-a) = 0$ となり、矛盾。

$$\therefore -a = a \text{ より, } 2a = 0.$$

よって、 $H = \{0, 4\}$.

$$|H| = 4 \text{ のとき, } H = \{0, b, c, d\}.$$

???

よって、 $H = \{0, 2, 4, 6\}$.

$$|H| = 8 \text{ のとき, } H = \mathbf{Z}_8.$$

問3. 10

(1)

$\times$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

a	1	5	7	11
a^{-1}	1	5	7	11

(2)

部分群を H とする.