

$A, B \in GL(n, R)$ とすると, $|A| \neq 0, |B| \neq 0$ なので, $|AB| = |A||B| \neq 0$.

よって, $AB \in GL(n, R)$.

(G1)は明らかに成り立つ.

(G2)は $e = E_n$ (n 次単位行列)とすることで成り立つ.

(G3)は $|A| \neq 0$ より, 逆行列が存在するので, $A \in GL(n, R)$ の逆元は A の逆行列.

(3)

(G0)を示す.

$$(a, x), (b, y) \in G$$

$$\Rightarrow (a, x) \cdot (b, y) = (ay + bx, xy)$$

ここで, $ay + bx \in Z_p, xy \in Z_p^*$ より, $(a, x) \cdot (b, y) \in G$.

(G1)を示す.

$$(a, x), (b, y), (c, z) \in G \text{ とすると,}$$

$$((a, x) \cdot (b, y)) \cdot (c, z) = (ay + bx, xy) \cdot (c, z) = (ayz + bxz + cxy, xyz),$$

$$(a, x) \cdot ((b, y) \cdot (c, z)) = (a, x) \cdot (bz + cy, yz) = (ayz + bxz + cxy, xyz).$$

$$\text{よって, } ((a, x) \cdot (b, y)) \cdot (c, z) = (a, x) \cdot ((b, y) \cdot (c, z)).$$

(G2)を示す.

$$e = (0, 1) \text{ とすれば,}$$

$$(a, x) \cdot e = (a, x) \cdot (0, 1) = (a, x),$$

$$e \cdot (a, x) = (0, 1) \cdot (a, x) = (a, x).$$

$$\text{よって, } (a, x) \cdot e = e \cdot (a, x).$$

(G3)を示す.

$$(b, y) = (-ax^{-2}, x^{-1}) \text{ とおけば,}$$

$$(a, x) \cdot (b, y) = (a, x) \cdot (-ax^{-2}, x^{-1}) = (0, 1) = e,$$

$$(b, y) \cdot (a, x) = (-ax^{-2}, x^{-1}) \cdot (a, x) = (0, 1) = e.$$

$$\text{よって, } (a, x) \cdot (b, y) = (b, y) \cdot (a, x) = e.$$

問3. 4

(1)

0の逆元が存在しないので, (G3)が成り立たない.

$\therefore$ 群でない.

また, 単位元は $e = 1$.

(2)

$a = b = c = 1$ のとき,

$$(a - b) - c = -1 \neq 1 = a - (b - c) \text{ なので, (G1)が成り立たない.}$$

また, 単位元は存在せず, 逆元も存在しない.

(3) (★印の代わりに○印を用いています) (※自信無し)

$a = 4, b = 16, c = 64$ のとき,

$$(a \circ b) \circ c = (4 \circ 16) \circ 64 = 10 \circ 64 = 37 \neq 22 = 4 \circ 40 = 4 \circ (16 \circ 64) = a \circ (b \circ c) \text{ なので, (G1)が成り立たない.}$$