問2．8

(1)

$N=280, N_1=56, N_2=40, N_3=35$より,

$$t_1=N_1^{-1}=56^{-1}=1^{-1}=1\in \boldsymbol{Z}_5 \quad (\because 56\equiv 1 \pmod 5),$$

$$t_2=N_2^{-1}=40^{-1}=5^{-1}=3\in \boldsymbol{Z}_7 \quad (\because 40\equiv 5 \pmod 7,\ 5\times 3\equiv 1 \pmod 7),$$

$$t_3=N_3^{-1}=35^{-1}=3^{-1}=3\in \boldsymbol{Z}_8 \quad (\because 35\equiv 3 \pmod 8,\ 3\times 3\equiv 1 \pmod 8)$$

なので，$x\equiv 1\times 56\times 1+2\times 40\times 3+3\times 35\times 3=56+240+315\equiv 51 \pmod{280}$.

(2)

まず，$\begin{cases} x\equiv 4 \pmod 5 \\ x\equiv 10 \pmod 7 \end{cases}$ を解く.

$N=35, N_1=7, N_2=5$より,

$$t_1=N_1^{-1}=7^{-1}=2^{-1}=3\in \boldsymbol{Z}_5 \quad (\because 7\equiv 2 \pmod 5,\ 2\times 3\equiv 1 \pmod 5),$$

$$t_2=N_2^{-1}=5^{-1}=3\in \boldsymbol{Z}_7 \quad (\because 5\times 3\equiv 1 \pmod 7)$$

なので，$x\equiv 4\times 7\times 3+10\times 5\times 3=84+150\equiv 24 \pmod{35}$.

よって，$x\equiv 24,59,94 \pmod{105}$.

この中で$x\equiv 1 \pmod 3$を満たすのは，$x\equiv 94 \pmod{105}$のみ.

$\therefore$与方程式の解は$x\equiv 94 \pmod{105}$.

(3)

$\gcd(2,3)=1$より,

$x\equiv 3 \pmod 6 \Leftrightarrow x\equiv 3 \pmod 2$かつ$x\equiv 3 \pmod 3$.

一方，$x\equiv 1 \pmod 4$より，$x\equiv 3 \pmod 2$.

故に，$x\equiv 3 \pmod 6$を$x\equiv 3 \pmod 3$に置き換えて良い.

よって，$\begin{cases} x\equiv 1 \pmod 4 \\ x\equiv 2 \pmod 5 \\ x\equiv 3 \pmod 3 \end{cases}$を解けば良い.

$N=60, N_1=15, N_2=12, N_3=20$より,

$$t_1=N_1^{-1}=15^{-1}=3^{-1}=3\in \boldsymbol{Z}_4 \quad (\because 15\equiv 3 \pmod 4,\ 3\times 3\equiv 1 \pmod 4),$$

$$t_2=N_2^{-1}=12^{-1}=2^{-1}=3\in \boldsymbol{Z}_5 \quad (\because 12\equiv 2 \pmod 5,\ 2\times 3\equiv 1 \pmod 5),$$

$$t_3=N_3^{-1}=20^{-1}=2^{-1}=2\in \boldsymbol{Z}_3 \quad (\because 20\equiv 2 \pmod 3,\ 2\times 2\equiv 1 \pmod 3)$$

なので，

$x\equiv 1\times 15\times 3+2\times 12\times 3+3\times 20\times 2=45+72+120\equiv 57 \pmod{60}$.