

問2. 3より, $6x \equiv 5 \pmod{13}$ を解く.

6 の $\mathbb{Z}_{13}$ における逆元は11であるので, この合同式の解は13を法として唯一.

$55 \equiv 3 \pmod{13}$ なので, この合同式は唯一の解, $x \equiv 3 \pmod{13}$ を持つ.

$\therefore 12x \equiv 10 \pmod{26}$ の解は, $x \equiv 3, 16 \pmod{26}$

(2)

$\gcd(4, 6) = 2$ が3を割り切らないので, 解なし.

(3)

まずこの方程式は, 26 の $\mathbb{Z}_{57}$ における逆元を求めることになるので, 解が存在すれば, それは唯一である.

この解を求めるために, $26a + 57b = 1$ を解く.

$\gcd(26, 57) = 1 = 11 \times 26 - 5 \times 57$ より,

$x_0 = 11, y_0 = -5$ はこの方程式の解の1つである.

$\therefore x \equiv 11 \pmod{57}$.

(4)

$\gcd(6, 12) = 6$ が4を割り切らないので, 解なし.

問2. 6

(1)

$$4 + 4 \times 2 + 8 \times 3 + 9 \times 4 + 0 \times 5 + 0 \times 6 + a \times 7 + 8 \times 8 + 9 \times 9 + 7 \times 10 \equiv 0 \pmod{11}$$

より, $7a \equiv 10 \pmod{11}$.

ここで, 問2. 2より, $7^{-1} \equiv 8$ であり, $80 \equiv 3 \pmod{11}$ なので,

$$7 \times 7^{-1} a \equiv 8 \times 10 \pmod{11} \text{ より, } a \equiv 3 \pmod{11}.$$

$\therefore a = 4$.

(2)

$$9 + 8 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + 2 \times 7 + 7 \times 8 + a \times 9 + 8 \times 10 \equiv 0 \pmod{11}$$

より, $9a \equiv 3 \pmod{11}$.

ここで, 問2. 2より, $9^{-1} \equiv 5$ であり, $15 \equiv 4 \pmod{11}$ なので,

$$9 \times 9^{-1} a \equiv 3 \times 5 \pmod{11} \text{ より, } a \equiv 4 \pmod{11}.$$

$\therefore a = 4$.

(3)

$$1 + 4 \times 2 + 0 \times 3 + 2 \times 4 + 0 \times 5 + 7 \times 6 + 0 \times 7 + 7 \times 8 + 9 \times 9 \equiv a \pmod{11}$$

より, $9 \equiv a \pmod{11}$.

$\therefore a = 9$.

(4)

$$0 + 1 \times 2 + b \times 3 + c \times 4 + 5 \times 5 + 0 \times 6 + 1 \times 7 + 9 \times 8 + 4 \times 9 + 3 \times 10 \equiv 0 \pmod{11}$$

より, $3b + 4c \equiv 4 \pmod{11}$.

ここで, b と c は 0, 8, 9 のいずれかであるので, 9通りの組み合わせを全て確かめて,

$b = 9, c = 8$.