

問1. 8

(1)

$\gcd(501, 243) = 3$ は1を割り切らないので、解なし.

(2)

$a = 527, b = 713$ のとき,

$\gcd(a, b) = 31 = -4a + 3b$ より, $62 = -8a + 6b$ なので,

$x_0 = -8, y_0 = 6$ は解の1つ.

$$\therefore \text{一般解は} \begin{cases} x = -8 + 23t \\ y = 6 - 17t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

(3)

$a = 4187, b = 7031$ のとき,

$\gcd(a, b) = 79 = 42a - 25b$ より, $237 = 126a - 75b$ なので,

$x_0 = 126, y_0 = -75$ は解の1つ.

$$\therefore \text{一般解は} \begin{cases} x = 126 + 89t \\ y = -75 - 53t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

問1. 9

$$p|(a_1 \cdots a_n)$$

$$\Leftrightarrow p|a_1 \text{ 又は } p|(a_2 \cdots a_n) \quad (\text{定理1. 6. 3})$$

$$\Leftrightarrow p|a_1 \text{ 又は } p|a_2 \text{ 又は } p|(a_3 \cdots a_n) \quad (\text{同上})$$

$$\Leftrightarrow \cdots$$

$$\Leftrightarrow p|a_1 \text{ 又は } p|a_2 \text{ 又は } \cdots \text{又は } p|a_n \quad (\text{同上}) \quad Q.E.D.$$

問1. 11

(1)

$$2^2 = 4 \equiv 1 \pmod{3} \text{ より,}$$

$$2^{123} = (2^2)^{61} \times 2$$

$$\equiv 1^{61} \times 2 \pmod{3}$$

$$\equiv 2 \pmod{3}$$

$\therefore$ 余りは2.

(2)

$$2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5} \text{ より,}$$

$$2^{123} = (2^4)^{30} \times 2^3$$

$$\equiv 1^{30} \times 8 \pmod{5}$$

$$\equiv 8 \pmod{5}$$