

問1. 1

(1)と、(4)で $a = \pm 1$ 以外るとき.

問1. 2

ユークリッドの互除法は表記が難しいので、答えのみ...

(1)

$$\gcd(a, b) = 31, x = -4, y = 3.$$

(2)

$$\gcd(a, b) = 47, x = -13, y = 10.$$

(3)

$$\gcd(a, b) = 79, x = 42, y = -25.$$

問1. 3(※説明不足)

[1. 3. 5]より, ある $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在して, $d = ax + by$ と書ける.

$$d \neq 0 \text{ より, 両辺を } d \text{ で割って, } 1 = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y.$$

$$\therefore \gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1.$$

問1. 4

[1. 3. 5]より, ある $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在して, $ax + by = \gcd(a, b) = 1$.

$a|bc$ より, ある $z \in \mathbb{Z}$ が存在して, $bc = az$.

$$\text{よって, } c = c \times 1 = c(ax + by) = acx + bcy = acx + ayz = a(cx + yz), (cx + yz) \in \mathbb{Z}$$

より, $a|c$. Q.E.D.

問1. 5

[1. 3. 5]より, ある $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在して, $ax + by = \gcd(a, b) = 1$.

また, $a|c, b|c$ より, ある $z, w \in \mathbb{Z}$ が存在して, $c = za, c = wb$.

$$\text{よって, } c = c \times 1 = c(ax + by) = acx + bcy = abwx + abyz = ab(wx + yz), (wx + yz) \in \mathbb{Z}$$

より, $ab|c$. Q.E.D.