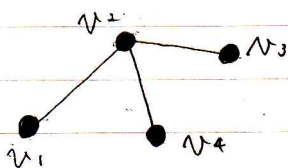


問題 2

(1) 単純な無向グラフ G を表現する隣接行列を A としたとき、

(*) $\begin{cases} A \text{ の } (i, j) \text{ 成分が } 1 & \text{つまり } a_{ij} = 1 \text{ であるとき } G \text{ 上の点 } i \text{ と } j \text{ の間に枝が存在} \\ A \text{ の } (i, j) \text{ 成分が } 0 & \text{つまり } a_{ij} = 0 \text{ であるとき } G \text{ 上の点 } i \text{ と } j \text{ の間に枝は存在しない} \end{cases}$

下のようなグラフを考える。



このグラフの隣接行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

その2乗は

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow v_1 \text{ から } v_1, v_2, v_3, v_4 \text{ へ枝を2本通って行く行き方の数?} \\ \rightarrow v_2 \text{ から} \\ \rightarrow v_3 \text{ から} \\ \rightarrow v_4 \text{ から} \end{matrix}$$

3乗は

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

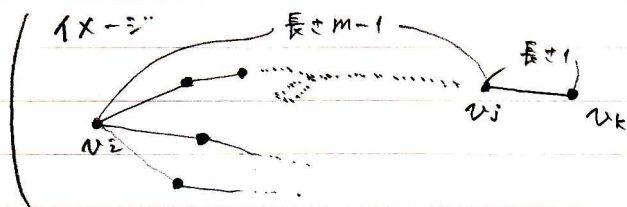
$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow v_1 \text{ から } v_1, v_2, v_3, v_4 \text{ へ枝を3本通って行く行き方の数?} \\ \rightarrow v_2 \text{ から} \\ \rightarrow v_3 \text{ から} \\ \rightarrow v_4 \text{ から} \end{matrix}$$

以上のことから、隣接行列 A の k 乗 A^k の (i, j) 成分を $a_{ij}^{(k)}$ と表すと、 $a_{ij}^{(k)}$ は v_i から v_j への行き方で通る枝数が k であるものの合計であると想定し、
帰納法を用いて証明する。 $\hookrightarrow$ 長さ k の異なる道の数、

(i) $k=1$ のとき (*) より明らかに ① は成り立つ。

(ii) $k=m-1$ のとき 成り立つと仮定すると、任意の2点 v_i から v_j までの長さが $m-1$ の行き方の合計は $a_{ij}^{(m-1)}$ となる。

(iii) $k=m$ のとき 任意の 2 点 v_i から v_k への長さが m の行き方は, v_k の隣点を v_j としたとき, v_k と v_j を結んでいる枝と, v_i から v_j への長さが $m-1$ である行き方からなっている。



仮定より v_i から v_j までの長さが $m-1$ である行き方の合計は $a_{ij}^{(m-1)}$ なので, v_i から v_k への長さが m である行き方の合計は

$$\sum_{j=1}^k a_{jk} a_{ij}^{(m-1)}$$

"

$$a_{ik}^{(m)}$$

(i) (ii) (iii) より ① は成り立つ。

(2), (3) は?