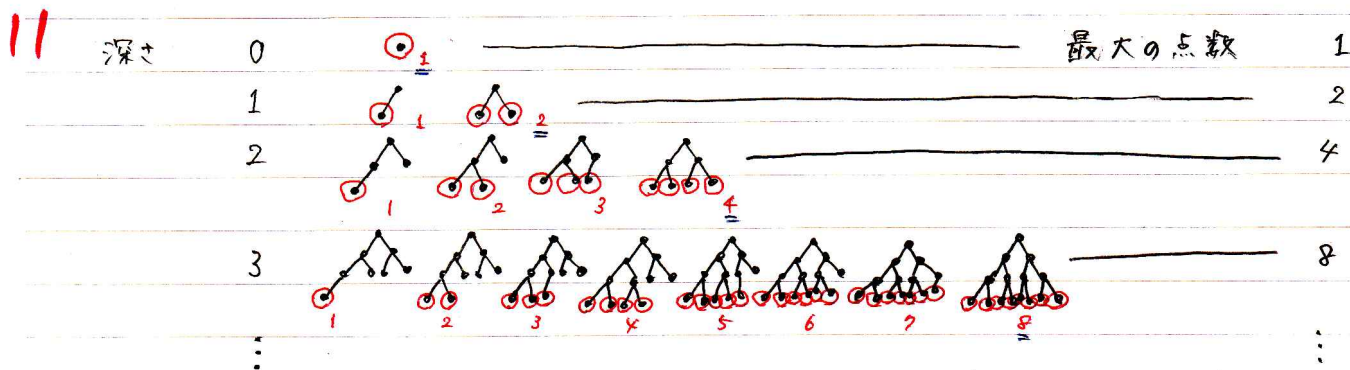


問題1

完全2分木の深さが d であるような点の数が最大となる場合を考える。



深さが d である点の数が最大となるのは、深さ $d-1$ 以下のすべての点が2つの子を持つ場合である。

ここで上図より(深さ, 最大頂点数)が $(0, 1=2^0)$, $(1, 2=2^1)$, $(2, 4=2^2)$, $(3, 8=2^3)$ となっていることから、「完全2分木の深さが d であるような点の数は最大で 2^d である」と想定できる。

このことを、数学的帰納法を用いて示す。

-(*)

i) $d=0$ のとき 点は根ただ1つであるので(*)は成り立つ。

ii) $d=k$ のとき 最大数は 2^k であると仮定。

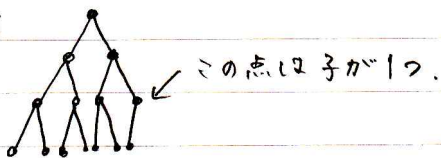
$d=k+1$ のとき 深さが k である点がすべて2つの子を持つので、深さが $k+1$ の点数は仮定より $2 \times 2^k = 2^{k+1}$ が最大となり、(*)は成り立つ。

i) ii) より 完全2分木の深さが d であるような点の数は最大で 2^d である。

ここで、点数が n の完全2分木の高さを h とする。

このとき、深さが $h-2$ 以下である点はすべて子を2つ持っており、深さが $h-1$ である点のみ、子が必ずしも2つであるとは限らない。(つまり、深さ $0 \sim h-1$ の点数が最大の場合である)

例



深さが h である点数を z とする。 ($1 \leq z \leq 2^h$)

深さが 0 から $h-1$ までの点の総数は $\sum_{k=0}^{h-1} 2^k = \frac{1(2^h-1)}{2-1} = 2^h-1$ であるので

高さが h の完全2分木の点数は $n = (2^h-1) + z$ で表すことができる。

$z=1$ のとき n は最小値 2^h 。

$z=2^h$ のとき n は最大値 $2^{h+1}-1$ となるので、 $2^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$ ①

①に対数をとると $\log 2^h \leq \log n \leq \log (2^{h+1}-1)$ 。

$$\log 2^h \leq \log n < \log 2^{h+1}$$

$$h \leq \log n < h+1$$

$$\therefore \log n - 1 < h \leq \log n \implies h = \lceil \log n \rceil$$

$$h = \lfloor \log n \rfloor \quad \text{より} \quad \log n - 1 < h \leq \log n$$

① n が十分に大きいとき, $5 \cdot \log n > \log n \geq h$ となることから, h が最大であっても
 $\exists C \cdot \log n \geq \log n \geq \lfloor \log n \rfloor = h$ となる C が存在する.

$$\text{よって} \quad h = O(\log n).$$

② n が十分に大きいとき, $h > \log n - 1 \geq \frac{1}{10} \log n$ となることから, h が最小であっても
 $\exists C \cdot \log n \leq \log n - 1 < \lfloor \log n \rfloor = h$ となる C が存在する.

$$\text{よって} \quad h = \Omega(\log n)$$

$\log n$ の単調性

①, ② より h は $O(\log n)$ か $\Omega(\log n)$ であるので
 $h = \Theta(\log n)$ //