

2) フグキ

$$x = y_1 g_1 + r_1$$

$$y_1 = r_1 g_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2 g_3 + r_3$$

$$r_2 = r_3 g_4 + r_4$$

$$\vdots$$

$$r_{k-2} = r_{k-1} g_k + r_k$$

と、ユークリッドの互除法が長回繰り返されたとき。

このとき

$$r_1 < \frac{x}{2}$$

$$r_2 < \frac{y_1}{2} < \frac{x}{2}$$

$$r_3 < \frac{r_1}{2} < \frac{x}{2^2}$$

$$r_4 < \frac{r_2}{2} < \frac{x}{2^2}$$

$$r_5 < \frac{r_3}{2} < \frac{x}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$r_{k-2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\lceil \frac{n-5}{2} \rceil} x$$

$$r_{k-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\lceil \frac{n-3}{2} \rceil} x$$

$$r_k < \left(\frac{1}{2}\right)^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} x$$

$$\text{よって } 0 < r_{k-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\lceil \frac{n-3}{2} \rceil} x < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}} x \text{ より}$$

$$r_{k-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}} x.$$

$$2^{\frac{n-3}{2}} r_{k-1} < x. \quad (\text{両辺対数をとる})$$

$$\log 2^{\frac{n-3}{2}} + \log r_{k-1} < \log x.$$

$$\frac{n-3}{2} < \log x - \log r_{k-1}.$$

$$n-3 < 2 \log x - 2 \log r_{k-1}$$

$$n < 2 \log x - 2 \log r_{k-1} + 3$$

$$= O(\log x).$$

よって、最悪時間計算量は $n = O(\log x)$ //