

$$3) \quad 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$$

n が十分大きいとき $5 \cdot 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ となることから $\exists C \cdot 2^n \geq 2^{n+1}$ となる C が存在する。 ($C > 2$)

つまり $2^{n+1} = O(2^n)$ は正しい。

$$4) \quad 2^{2n} = 2^n \cdot 2^n$$

$$2^n = O(2^n) \text{ であるより } 2^n \cdot 2^n = O(2^n) \cdot O(2^n) \\ = O(2^{2n}).$$

つまり $2^{2n} = O(2^{2n})$ となるより $2^{2n} = O(2^n)$ は正しくない。

$$5) \quad \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \\ = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

n が十分大きいとき

$$\frac{1}{2}(n^2 + n) \leq n^2 + n = O(n^2).$$

$$\frac{1}{2}(n^2 + n) \geq \frac{1}{10}(n^2 + n) = \Omega(n^2).$$

$$\therefore O(n^2) \text{ か } \Omega(n^2) \text{ あり } \sum_{i=1}^n i = \Theta(n^2)$$

$$6) \quad n! ; n^n \text{ について 対数をとると } \log n!, \log n^n$$

$$\quad \quad \quad // \quad \quad \quad = n \log n$$

$$\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n)$$

//

$$\log 1 + \log 2 + \dots + \log(n-1) + \log n$$

//

$$\log 2 + \log 3 + \dots + \log(n-1) + \log n$$

$$n \text{ が十分大きいとき } \log 2 + \log 3 + \dots + \log(n-1) + \log n < n \log n.$$

$$\text{つまり } n! < n^n \text{ となり } n! < C n^n \text{ となる } C \text{ が存在する。}$$

$$\text{よって } n! = O(n^n) \text{ は正しい。}$$