

問題 1

(1) $(2n^2 + \log^7 n + 10)(\sqrt{n} + 10n^{0.1} + 5\log n)$ のオーダーを見積もる.

$2n^2 + \log^7 n + 10$ について, $2n^2, \log^7 n$ のオーダーをとると (底は 2) $\log 2n^2, \log \log^7 n$ とする.

$$\log 2n^2 = \log 2 + \log n^2 = 2\log n + 1.$$

$$\log \log^7 n = \log (\log n)^7 = 7\log (\log n). \quad \text{より} \quad 2\log n + 1 > 7\log (\log n). \quad (n \text{ が十分大きいとき})$$

$$\text{よって} \quad 2n^2 > \log^7 n. \quad (\quad)$$

$$\therefore 2n^2 + \log^7 n + 10 = O(n^2).$$

$\sqrt{n} + 10n^{0.1} + 5\log n$ について.

$$\sqrt{n} + 10n^{0.1} + 5\log n = n^{\frac{1}{2}} + 10n^{\frac{1}{10}} + 5\log n$$

$$n \text{ が十分大きいとき} \quad n^{\frac{1}{2}} > 10n^{\frac{1}{10}} > 5\log n.$$

$$\text{よって} \quad \sqrt{n} > 10n^{0.1} > 5\log n$$

$$\therefore (\sqrt{n} + 10n^{0.1} + 5\log n) = O(\sqrt{n})$$

$$\text{よって} \quad (2n^2 + \log^7 n + 10)(\sqrt{n} + 10n^{0.1} + 5\log n)$$

$$= O(n^2) \cdot O(\sqrt{n})$$

$$= O(n^{\frac{5}{2}})$$

2) $\sqrt{n^2 + 100n}$ のオーダーを見積もる.

$$n=100 \text{ のとき} \quad \sqrt{n^2 + 100n} = \sqrt{10000 + 10000} = \sqrt{20000} \\ = 100\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2n} - \sqrt{n^2 + 100n} = \frac{2n^2 - (n^2 + 100n)}{\sqrt{2n} + \sqrt{n^2 + 100n}}$$

$$= \frac{n^2 - 100n}{\sqrt{2n} + \sqrt{n^2 + 100n}}$$

$$= \frac{n - 100}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \frac{100}{n}}}$$

よって $n > 100$ のとき $\sqrt{2n} - \sqrt{n^2 + 100n}$ は常に正数となる。

つまり n が十分大きいとき $\exists Cn > \sqrt{n^2 + 100n}$ となる C が存在するので $O(n)$ ($C > \sqrt{2}$)

$$\sqrt{n^2 + 100n} = O(n).$$