

問題 1 f を 3-変数の原始帰納的関数とし, g を 2-変数の原始帰納的関数とします.

(1) パラメータが揃っていない合成でも原始帰納的であることが保たれることを, 次の h_1 と h_2 が原始帰納的関数となることで確かめなさい (示しなさい).

$$h_1(x, y) = f(y, g(y, x), x)$$

$$h_2(x, y) = f(g(y, x), y, f(x, x, y))$$

(2) パラメータが揃っていない再帰でも原始帰納的であることが保たれることを, 次の h_3 と h_4 が原始帰納的関数となることで確かめなさい (示しなさい). パラメータが揃っていない合成で原始帰納的であることが保たれることを用いても構いません.

$$\begin{cases} h_3(x, 0) &= f(x, 0, x) \\ h_3(x, y+1) &= g(x, h_3(x, y)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_4(x, 0) &= f(x, g(x, x), x) \\ h_4(x, y+1) &= g(f(x, y, x), h_4(x, y)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= 0 \\ (x+1) \cdot 0 &= (x+1) \cdot 0 \\ (x+1) \cdot 1 &= (x+1) \cdot 0 + 1 = (x+1) \end{aligned}$$

(3) パラメータの揃っていない最小化作用素でも帰納的であることが保たれることを, 次の h_5 が帰納的関数となることで確かめなさい (示しなさい). パラメータが揃っていない合成で原始帰納的であることが保たれることを用いても構いません.

$$h_5(x, y) \simeq \mu w (f(g(y, w), w, x) = 0)$$

問題 2 f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 を 1-変数の原始帰納的関数とします. 次の関数 $h_1 \sim h_6$ が原始帰納的であることを示しなさい. 補題 3.2 で示した関数達 ($+$, $\times$, pd , $\dot{-}$, sg , $\overline{\text{sg}}$, $|-|$, $\max$) が原始帰納的であることを用いても構いません.

$$(1) \quad h_1(x) = \begin{cases} 0, & f(x) = 0 \text{ のとき,} \\ 1, & f(x) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (2) \quad h_2(x) = \begin{cases} 0, & f(x) = 0 \text{ のとき,} \\ f(x), & f(x) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定まる h_1 . で定まる h_2 .

$$(3) \quad h_3(x) = \begin{cases} g(x), & f(x) = 0 \text{ のとき,} \\ 0, & f(x) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4) \quad h_4(x) = \begin{cases} g_1(x), & f(x) = 0 \text{ のとき,} \\ g_2(x), & f(x) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定まる h_3 . で定まる h_4 .

$$(5) \quad h_5(x) = \begin{cases} g_1(x), & f_1(x) = f_2(x) \text{ のとき,} \\ g_2(x), & f_1(x) \neq f_2(x) \text{ のとき} \end{cases}$$

で定まる h_5 .

$$(6) \quad h_6(x) = \begin{cases} g(x), & f_1(x) = f_2(x) \text{ のとき,} \\ g_1(x), & f_1(x) < f_2(x) \text{ のとき,} \\ g_2(x), & f_1(x) > f_2(x) \text{ のとき} \end{cases}$$

で定まる h_6 .

問題 3 f, g_1, g_2 を 1-変数の原始帰納的関数とします.

$$h(x, y) = \sum_{g_1(y) \leq t < g_2(x)} f(t)$$

で定まる h が原始帰納的であることを示しなさい.