空間幾何

1　三次元空間での直線の表現

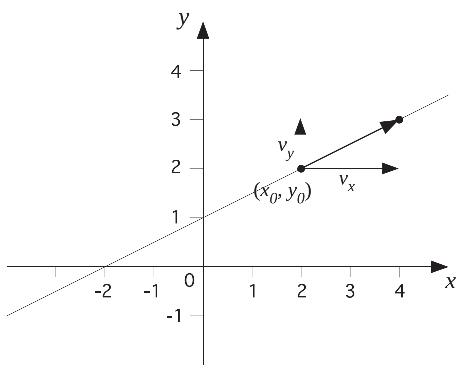
点 (x_0, y_0, z_0) を通り，ベクトル (v_x, v_y, v_z) で向きが表されている空間での直線は，**方程式型**で表現すると以下の式となる．ベクトル (v_x, v_y, v_z) は**方向ベクトル**と呼ばれている．

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z} \tag{1}$$

パラメータ型の場合，パラメータ t を用いて表すと以下の式となる．

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t \end{cases} \tag{2}$$

つまり，式 1= t とおき，x, y, z それぞれについて整理したものである．パラメータ型の方が式自体簡潔で解りやすい．下図は，２次元における直線の式を表したものであるが，２次元における直線もパラメータ型で表現できる．単に z の式に関する式を無くしたにすぎない．



ここで，媒介変数の意味について考える．$t = 0$ のときの座標は，出発点 (x_0, y_0, z_0) であり，$t = 1$ の時は，$(x_0 + v_x, y_0 + v_y, z_0 + v_z)$ となる．したがって，t はベクトルの大きさを単位としている．

方向ベクトル (v_x, v_y, v_z) の大きさは，任意で構わないが，ベクトルの大きさが 1 の単位ベクトルの時は，v_x は x 軸と直線との傾きの余弦，v_y は y 軸と直線との傾きの余弦，v_z は z 軸と直線との傾きの余弦を表し，**方向余弦**と呼ばれている．

パラメータ型であれば，次元を拡張することも簡単であり，線分を表現することも簡単である．コンピュータで扱う図形などの情報は，方程式や関数での表現よりパラメータ型で表現している例の方が非常に多い．また，統計の世界では n 次元のベクトルも登場するため n 次元空間での直線の式も登場する．ここでパラメータ型について修得しておくべきである．

2　点と線分との関係

2.1　線分における分点

点 $\mathrm{A}(x_a, y_a, z_a)$ と点 $\mathrm{B}(x_b, y_b, z_b)$ を $m:n$ に内分する点の座標 (x, y, z) を求める．点 A を出発点とする直線の式は，以下の通りである．

$$\begin{cases} x = x_a + (x_b - x_a)t \\ y = y_a + (y_b - y_a)t \\ z = z_a + (z_b - z_a)t \end{cases} \tag{3}$$

$t = 0$ のとき点 A となり，$t = 1$ のとき点 B となる．つまり t は点 A, B 間の距離を 1 とする単位といえる．したがって，点 A, B を $m:n$ に内分する点は，$t = \frac{m}{m+n}$ のときの座標を求めることになり，次式を得る．

$$\begin{cases} x = x_a + (x_b - x_a)\dfrac{m}{m+n} = \dfrac{nx_a + mx_b}{m+n} \\ \\ y = y_a + (y_b - y_a)\dfrac{m}{m+n} = \dfrac{ny_a + my_b}{m+n} \\ \\ z = z_a + (z_b - z_a)\dfrac{m}{m+n} = \dfrac{nz_a + mz_b}{m+n} \end{cases} \tag{4}$$

2.2　点と直線との距離

点 $\mathrm{A}(x_a, y_a, z_a)$ を通り，ベクトル (v_x, v_y, v_z) で向きが表されている空間直線と，点 $\mathrm{B}(x_b, y_b, z_b)$ との最短距離を求める．最短距離は，点 B から直線へ下ろした垂線の長さと等しい．そこで，まず点 B から直線上の任意の点に向かうベクトルを求める．

$$((x_a + v_x t) - x_b, (y_a + v_y t) - y_b, (z_a + v_z t) - z_b) \tag{5}$$

このベクトルと直線の方向ベクトル (v_x, v_y, v_z) は直交するので，これらのベクトルの内積は 0 となる．したがって，それを満たす t を求めれば，垂線の足の座標が求まり，続いて最短距離を得る．

$$\begin{aligned} v_x\{(x_a + v_x t) - x_b\} + v_y\{(y_a + v_y t) - y_b\} + v_z\{(z_a + v_z t) - z_b)\} &= 0 \\ (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)t &= v_x(x_b - x_a) + v_y(y_b - y_a) + v_z(z_b - z_a) \\ t &= \frac{v_x(x_b - x_a) + v_y(y_b - y_a) + v_z(z_b - z_a)}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \end{aligned} \tag{6}$$

3　空間における面の表現

3.1　面の表現

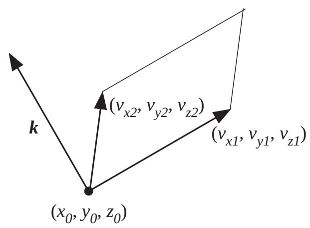
空間平面の式は，方程式型で表すと以下のようになる．

$$ax + by + cz = 1 \tag{7}$$

任意の x, y の値について必ず 1 つの z が存在する．平面の式を求めるためには，平面上の三点の座標が解れば，連立一次方程式により係数 a, b, c を求めることが出来る．なお，(a, b, c) は**法線ベクトル**と呼ばれ，平面に垂直なベクトルを表す．また，$\frac{1}{a}$ は x 軸と平面との交点，$\frac{1}{b}$ は y 軸と平面との交点，$\frac{1}{c}$ は z 軸と平面との交点の値を表す．空間平面を媒介変数 s, t によりパラメータ型で表すと以下の式となる．

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{x1}s + v_{x2}t \\ y = y_0 + v_{y1}s + v_{y2}t \\ z = z_0 + v_{z1}s + v_{z2}t \end{cases} \tag{8}$$

空間平面は，平面上の二つの異なるベクトルよりパラメータ型で定義できる．つまり，(x_0, y_0, z_0) は平面上のある点の座標を表し，$(v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}), (v_{x2}, v_{y2}, v_{z2})$ は平面上の二つのベクトルを表す．したがって，三角形平面や平行四辺形平面を表現するのに適している．下図は，その状況を図に表したものである．なお $\boldsymbol{k}$ は，法線ベクトルを表している．



$(0 < s + t < 1)$ の範囲においては二つのベクトルで構成される三角形の内部を表し，$(0 < s < 1) \cap (0 < t < 1)$ の範囲においては二つのベクトルで構成される平行四辺形の内部を表している．

パラメータ型の平面の式より法線ベクトル (a, b, c) を求めるには，平面が x 軸，y 軸，z 軸と交わる座標を求めれば，導くことができる．例えば x 軸と交わる座標は，$y = 0, z = 0$ を満たす s, t を求めれば計算できる．したがって，計算された x 座標の逆数が法線ベクトルにおける x 成分の a となる．b, c においても同様に計算できる．

法線ベクトルは，外積を計算することでも求めることが出来る．$(v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}), (v_{x2}, v_{y2}, v_{z2})$ の外積は，$(v_{y1}v_{z2} - v_{z1}v_{y2},\ v_zv_{x2} - v_{x1}v_{z2},\ v_{x1}v_{y2} - v_{y1}v_{x2})$ となる．外積により求まった法線ベクトルは，平面の式の法線ベクトル (a, b, c) と方向は同じであるが，大きさは異なる．したがって，出発点の (x_0, y_0, z_0) を面の式に代入して，外積で求まった法線ベクトルの大きさを調整しなければならない．

4　面と点，直線との関係

4.1　直線と面との関係

パラメータ型で表された直線と方程式型で表された面との交点を求めるには，まず直線の式の x, y, z を面の式に代入し，t を求める．

$$
\begin{aligned}
a(x_0 + v_x t) + b(y_0 + v_y t) + c(z_0 + v_z t) &= 1 \\
(av_x + bv_y + cv_z)t &= 1 - (ax_0 + by_0 + cz_0) \\
t &= \frac{1 - ax_0 - by_0 - cz_0}{av_x + bv_y + cv_z}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

これにより求まった t を直線の式に代入すると，交点の座標が求まる．

4.2　点と面と最短距離

まず，ある方程式型で表された平面への垂線の足の座標を求める．面の法線ベクトル (a, b, c) と一致する方向ベクトルを有する直線で点 (x_0, y_0, z_0) を通る直線の式は，次のようになる．

$$
\begin{cases}
x = x_0 + at \\
y = y_0 + bt \\
z = z_0 + ct
\end{cases}
\tag{10}
$$

この直線と面との交点を求めれば良い．先と同様に直線の式を面の式に代入し，t を求める．

$$
\begin{aligned}
a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) &= 1 \\
(a^2 + b^2 + c^2)t &= 1 - (ax_0 + by_0 + cz_0) \\
t &= \frac{1 - ax_0 - by_0 - cz_0}{a^2 + b^2 + c^2}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

これにより求まった t を直線の式に代入すると，垂線の足の座標が求まり，続いて最短距離が求まる．