4　微分幾何学

以下、ベクトル $\boldsymbol{A}$ を、$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と表します。偏微分の記号と区別しましょう。ベクトルは太字で、スカラーは通常の書体で表します。

4.1　ベクトル場とスカラー場

ある空間にスカラーが分布しているとき、この空間をスカラー場といいます。例えば温度分布はスカラー場です。空間のある点を指定すればその点における温度が決まります。

ある空間にベクトルが分布しているとき、この空間をベクトル場といいます。例えば重力分布はベクトル場です。空間のある点を指定すればその点における重力の大きさとその向きが決まります。

4.2　内積・外積

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積を、

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \tag{4.1}$$

で定義します。内積はスカラーです。$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}$ は、$\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{B}$ 方向の成分です。$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角を θ とすると、$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$ です。

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積を、

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_2B_3 - A_3B_2\,,\ A_3B_1 - A_1B_3\,,\ A_1B_2 - A_2B_1) \tag{4.2}$$

で定義します。外積はベクトルです。$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の大きさは $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がなす平行四辺形の面積に等しく、$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の向きは $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がなす平面に垂直です。

実際に成分計算をすると以下の公式が導けます。

$$\boldsymbol{A}\bullet(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (\text{スカラー三重積}) \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{A}\ \times\ (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \quad (\text{ベクトル三重積}) \tag{4.4}$$

4.3　曲線の長さ

$\boldsymbol{r} = (x(t), y(t), z(t))$ を、曲線のベクトル方程式といいます。媒介変数 t が動けば座標 (x, y, z) が動き、曲線を作るというわけです。この曲線の長さ s を求めましょう。曲線を非常に細かく分割したとき、1 つの区間の長さを Δs とします。Δs を定積分すれば弧長 s が求まります。Δs は非常に短いので線分とみなすことができて、

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}\cdot\Delta t = \left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|\Delta t \tag{4.5}$$

よって、t が a から t まで動くときの弧長 $s(t)$ は、

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^t \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt \tag{4.6}$$

両辺を t で微分して、

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| \tag{4.7}$$

t を時間とすると、$\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$ は速さを表すので、道のりを時間で微分したものが速さであることがわかります。(4.6) を用いて s と t の関係を求めれば、媒介変数を t から s にすることができます。ds を線素といいます。

4.4　接線・法線・曲率・ねじれ率

$\boldsymbol{r}$ が s を媒介変数としているとします。

$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \dot{\boldsymbol{r}}$ は $\boldsymbol{r}$ の接線ベクトルなので、接線単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ は、

$$\boldsymbol{t} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|} \tag{4.8}$$

です。(4.7) より、

$$\boldsymbol{t} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}/\frac{ds}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \tag{4.9}$$

ここで、$\boldsymbol{t}$ の長さは一定なので、$\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \boldsymbol{t}'$ として、$(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t})' = 2\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}' = (|\boldsymbol{t}|^2)' = 0$ より、$\boldsymbol{t}'$ は $\boldsymbol{t}$ と直交するので、$\boldsymbol{r}$ の法線方向です。よって、主法線単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ は、

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{t}'}{|\boldsymbol{t}'|} \tag{4.10}$$

図のように、ある点における接線単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ と、そこから弧長 s の増分 Δs に対応した点における接線単位ベクトル $\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\Delta t}$ のなす角を $\Delta\theta$ とします。２点の法線がなす角も $\Delta\theta$ です。

このとき、曲率 κ を、$\kappa = \left|\dfrac{d\theta}{ds}\right|$ で定義します。

ここで、$\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\Delta t}$ の始点を $\boldsymbol{t}$ の始点に重ねたときにできる三角形ＡＢＣについて、ＢＣ $= |\boldsymbol{\Delta t}|$、ＡＢ $=$ ＡＣ $= |\boldsymbol{t}| = 1$ より、

$$\begin{aligned}\mathrm{BC} &= 2\,\mathrm{AB}\sin\frac{\Delta\theta}{2} \simeq \mathrm{AB}\Delta\theta \\ |\boldsymbol{\Delta t}| &= \Delta\theta\end{aligned}$$

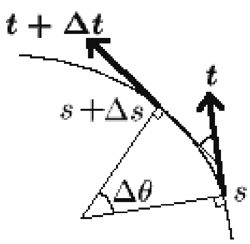
Δs で割って極限をとると、

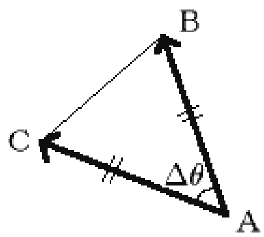
$$\left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| = |\boldsymbol{t}'| = \frac{d\theta}{ds} = \kappa \tag{4.11}$$

よって、主法線単位ベクトルは、

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{t}'}{\kappa} = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \tag{4.12}$$

曲率 κ は曲線の曲がり具合を表します。





従法線単位ベクトル $\boldsymbol{b}$ を、

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n} \tag{4.13}$$

で定義します。$\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$ は互いに直交し、右手系を構成します。(4.9) の次の行と同様にして、$\dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ は、$\boldsymbol{b}$ と直交することが分かります。また、$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}= 0$ の両辺を微分することにより、$\boldsymbol{t}$ と直交することも分かります。すなわち $\dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ は、$\boldsymbol{n}$ に平行で、

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n} \tag{4.14}$$

と表すことできます。τ をねじれ率 (れい率) と呼びます。両辺を$\boldsymbol{n}$の内積をとって、

$$\tau = -\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \tag{4.15}$$

となり、$\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$ は互いに直交するので

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \frac{d}{ds}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t}) = \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \times \boldsymbol{t} + \boldsymbol{b} \times \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t} + \kappa\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n} = \tau\boldsymbol{b} - \kappa\boldsymbol{t}$$

これと (4.12)、(4.14) をあわせて、フルネ・セレの公式といいます。

$$\boldsymbol{t}' = \kappa\boldsymbol{n}\ ,\ \boldsymbol{b}' = -\tau\boldsymbol{n}\ ,\ \boldsymbol{n}' = \tau\boldsymbol{b} - \kappa\boldsymbol{t} \tag{4.16}$$

4.5 曲面

関数 $z = f(x, y)$ は曲面を表します。ベクトル方程式にすると、$\boldsymbol{r} = (x, y, f(x, y))$ となります。一般に、２つの媒介変数 u、v を持つベクトル方程式 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ は曲面を表します。

位置ベクトル $\boldsymbol{r}(u, v)$ が表す点を $\mathrm{P}\ (u, v)$ とおきます。4 点 $\mathrm{P}_1(u, v)$、$\mathrm{P}_2(u + du, v)$、$\mathrm{P}_3(u, v + dv)$、$\mathrm{P}_4(u + du, v + dv)$ をとります。この 4 点を結んでできる図形は平行四辺形と近似できます。この微小な平行四辺形の面積 dS を求めましょう。外積 (4.2 節) により、$dS = |\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \times \overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3}|$ です。

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \quad = \quad \boldsymbol{r}(u + du, v) - \boldsymbol{r}(u.v) = \frac{\boldsymbol{r}(u + du, v) - \boldsymbol{r}(u.v)}{du}du = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}du$$

同様に、$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3} = \dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}dv$ なので、

$$dS = \left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|dudv \tag{4.17}$$

dS を曲面 S の面積素といいます。両辺を積分すると、曲面積 S は、

$$S = \iint_S \left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|dudv \tag{4.18}$$

特に x-y 平面上での面積は $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$、$u = x$、$v = y$ として、$\displaystyle\iint_S dxdy$ となります。S を囲む境界が分かっているときは (6.7 式) を用いると便利です。

$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ は曲面に接しているので、両者の外積は曲面に垂直です。よって、曲面の法単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ は、

$$\boldsymbol{n} = \frac{\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|} \tag{4.19}$$

で表されます。これに面積素をかけたものをベクトル面積素 $d\boldsymbol{S}$ といいます。

$$d\boldsymbol{S} = dS\boldsymbol{n} = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}dudv \tag{4.20}$$