

有限要素法ソルバの使い方

1.	はじめに	1
2.	単純引張問題	2
2.1	例題	2
2.2	理論解	3
2.2.1	応力とは	3
2.2.2	ひずみ	5
2.2.3	変位	8
2.3	解析モデル	9
2.4	計算結果	11
3.	APPENDIX	12
3.1	フックの法則	12

1. はじめに

本書は、

- ・ 初めて材料力学の本を購入して勉強されようとしている方
 - ・ 材料力学の例題を、初めて有限要素法(FEM)を使用して試してみようと思っている方
- を対象した入門書です.

本書では、複数の例題に対して以下を実施して、「材料力学の勘どころ」と「有限要素法ソフトの使用方法」について説明します.

①材料力学より理論解を求める

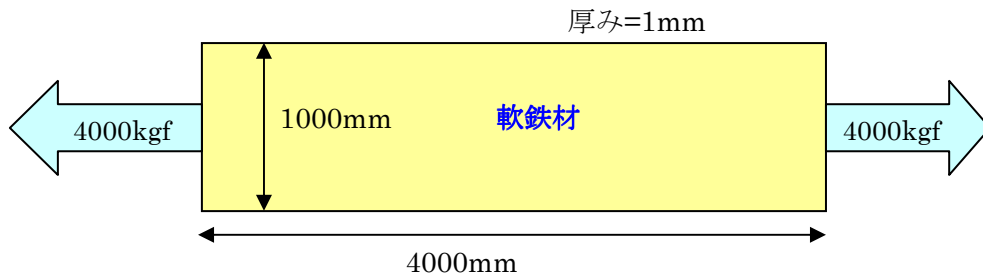
②有限要素法ソフト(2次元弾性解析)で確認する

本書は、材料力学や有限要素法についてのイメージを持つための資料となっていますので正確な理論など知りたい場合には、目的にあった書籍等を参照してください.

2. 単純引張問題

2.1 例題

4000mm X 4000mm の軟鉄材（厚み 1mm）を 4000kgf で引張った際の、変位、ひずみ、応力を求めます。



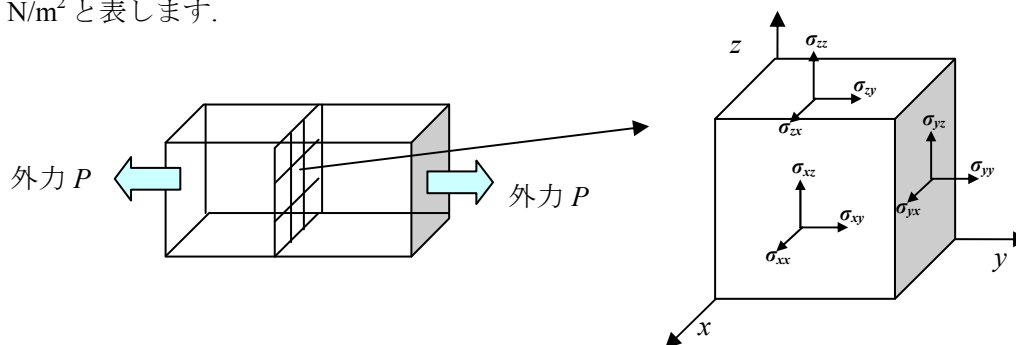
No	項目	値
1	ヤング率[E]	・ヤング率は、物の硬さを表す率です。この値が大きいと硬いと表現されます。（ヤング率のイメージは Appendix を参照） ・軟鉄材とします。（軟鉄材はゴルフクラブのアイアンなどに使用されているようです） ・ネット検索した結果値は 21.14×10^{10} [Pa : N/m²]です。 ・形状の単位に合わせるため、m²を mm²に変換し、N を kgf に変換すると 21140 [kgf/mm²]となります。 ・本書では、簡略して 21000[kgf/mm²]を使用します。
2	ポアソン比[v]	・軟鉄のポアソン比は 0.293 です。 ・本書では、簡略して 0.3 を使用します。
3	重力[g]	自重は考慮しません。
4	質量[m]	自重は考慮しません。

2.2 理論解

2.2.1 応力とは

(1)概要

応力 $[\sigma]$ は、仮想断面で分割した仮想表面に作用する単位面積当たりの力(内力)です。例えば 100 N/m^2 と表します。



応力はテンソルです。微小 6 面体要素を考えると 9 成分あり、並べて書くと以下のようになります。

- σ_{xx} のように添え字 i, j が同じものは垂直応力を表します。 σ_x のように表記することもできます。
- σ_{xy} のように添え字 i, j が異なるものは、せん断応力を表します。 τ_{xy} のように表記することもできます。添え字が逆になっている τ_{xy} と τ_{yx} は力がつりあっていますので共役せん断応力とも呼ばれ、表記では τ_{xy} と τ_{yx} を入れ替えてよいことになっています。

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

1)平面応力問題

引張り問題で、厚みが十分に薄い問題では、厚み方向の応力は、ほとんど無視できると考えられます。これを平面応力問題といいます。

厚み方向を z とすると、応力テンソルは、以下のように簡略化されます。

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 応力

本例題の応力 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{xz} を求めます。

本例題は、平面応力問題です。平面応力問題では、 z 方向に作用する応力がほとんど無いと仮定できますので σ_z 、 τ_{yz} 、 τ_{xz} の計算は不要です。

垂直応力 σ_x は、以下の式で求められます。 P は引っ張り力、 A は断面積です。

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{4000[\text{kgf}]}{1000[\text{mm}] \times 1[\text{mm}]} = 4[\text{kgf} / \text{mm}^2]$$

SI 単位系(N)(*1)では、9.8N で約 40N/mm² です。

(*1) 質量 1kg の重量は kgf です。SI 単位系では、1kg の質量に 1m/s² の加速度が生じる時の力を 1N と定義しています。

垂直応力 σ_y は、以下の式で求められます。 P は引っ張り力、 A は断面積です。

$$\sigma_y = \frac{P}{A} = \frac{0.0[\text{kgf}]}{2000[\text{mm}] \times 1[\text{mm}]} = 0.0[\text{kgf} / \text{mm}^2]$$

せん断応力 τ_{xy} は、発生しないため 0.0[kgf/mm²] です。

(3) ミーゼス応力(相当応力)

ミーゼス応力は、以下の式で求められます。 X 方向のみ応力が発生していますので、 σ_x と同様の値となります。

$$\begin{aligned}\sigma_{Mises} &= \sqrt{0.5 \times ((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2) + 3 \times (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} \\ &= 4[\text{kgf/mm}^2]\end{aligned}$$

理論解を整理すると、以下の通りになります。

平面応力問題なので σ_z 、 τ_{yz} 、 τ_{xz} は 0.0[kgf/mm²]

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{4000[\text{kgf}]}{1000[\text{mm}] \times 1[\text{mm}]} = 4[\text{kgf} / \text{mm}^2]$$

$$\sigma_y = \frac{P}{A} = \frac{0.0[\text{kgf}]}{2000[\text{mm}] \times 1[\text{mm}]} = 0.0[\text{kgf} / \text{mm}^2]$$

$$\tau_{xy} = 0.0[\text{kgf} / \text{mm}^2]$$

$$\sigma_{Mises} = 4[\text{kgf} / \text{mm}^2]$$

本例題では、上記値は、部材のどの場所でも同じとなります。

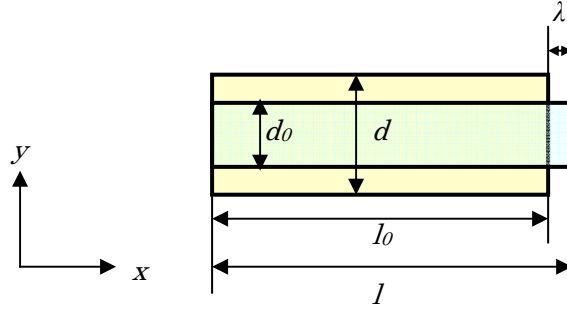
2.2.2 ひずみ

(1) ひずみとは

縦ひずみと横ひずみがあります。縦ひずみ ε_x は、元形状の単位長さあたりの伸びを表します。横ひずみも ε_y 同様です。ま

$$\varepsilon_x = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\lambda}{l_0}$$

$$\varepsilon_y = \frac{d - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0}$$



ひずみは応力と同様にテンソルで表現されます.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \gamma_{xy} \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \varepsilon_y \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \gamma_{yz} \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

(2) ひずみ ε_x , ε_y , ε_{xy}

本例題では、引張り方向が x ですので縦ひずみ ε_x は、垂直応力 σ 、 E としてフックの法則で求められます。

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{4[\text{kgf/mm}^2]}{21000[\text{kgf/mm}^2]} = 1.9 \times 10^{-4}$$

横ひずみ ε_y は、縦ひずみと横ひずみの比であるポアソン比 ν は

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$

から算出できます。

$$\varepsilon_y = -\nu \times \varepsilon_x = 0.3 \times 1.9 \times 10^{-4} = -5.7 \times 10^{-5}$$

ε_z は、以下により求められます。

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -5.7 \times 10^{-5}$$

せん断ひずみはせん断応力と同様に無視できますので

$$\varepsilon_{xy} = 0.0$$

となります。

[補足]

工学ひずみ：せん断ひずみには、工学ひずみと呼ばれるものがありテンソルひずみより、2 倍程度大きくなります。有限要素法では工学ひずみを使用します。

材料力学の仮定：材料力学では、微小変形を仮定(通常は 1%以下のひずみ)、ゴム変形、塑性変形のように大きな変形を扱い場合には、有限変形理論を用いてひずみの定義をかえる必要があります。

(3) ミーゼスひずみ(相当ひずみ)

応力と同様の式で求められます.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{Mises} &= \sqrt{0.5 \times ((\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2) + 3 \times (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)} \\ &= 2.25 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

理論解を整理すると、以下の通りになります。

平面応力問題なので γ_{yz} , γ_{zx} , は $0.0[\text{kgf/mm}^2]$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{4[\text{kgf/mm}^2]}{21000[\text{kgf/mm}^2]} = 1.9 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \times \varepsilon = 0.3 \times 1.9 \times 10^{-4} = -5.7 \times 10^{-5}$$

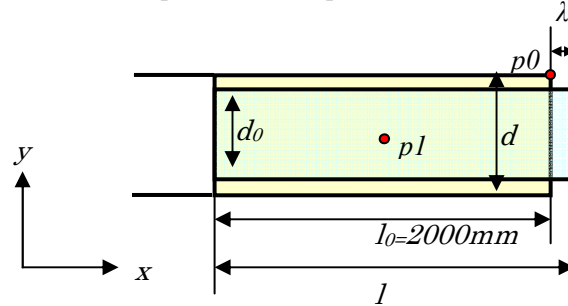
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -5.7 \times 10^{-5}$$

$$\gamma_{xy} = 0.0$$

$$\varepsilon_{Mises} = 2.25 \times 10^{-4}$$

2.2.3 変位

変形量 u_x , u_y は、ひずみの積分の形で表されます。よって部材の場所毎に異なります。部材の中心軸から右側を見て、点 p0(端部)と点 p1(部材の重心)の変位を求めると以下のようになります。



点 p0 では、

$$u_x^{p0} = \varepsilon_x \times l_0 = 1.9 \times 10^{-4} \times 2000 [\text{mm}] = 0.38 [\text{mm}]$$

$$u_y^{p0} = \varepsilon_y \times d_0 = 5.7 \times 10^{-5} \times 1000 [\text{mm}] = 0.057 [\text{mm}]$$

点 p1 では、

$$u_x^{p1} = \varepsilon_x \times \frac{l_0}{2} = 1.9 \times 10^{-4} \times 1000 [\text{mm}] = 0.19 [\text{mm}]$$

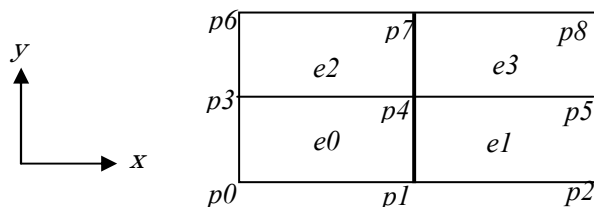
$$u_y^{p1} = \varepsilon_y \times \frac{d_0}{2} = 5.7 \times 10^{-5} \times 500 [\text{mm}] = 0.0285 [\text{mm}]$$

となります。

2.3 解析モデル

(1) メッシュ

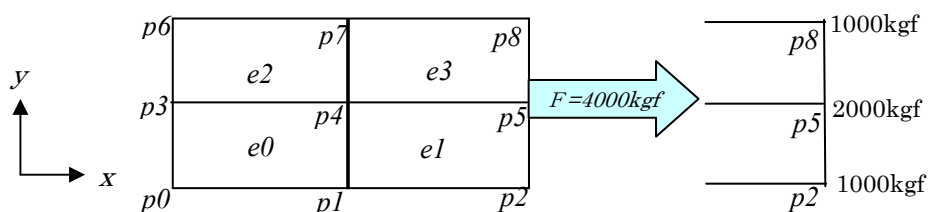
1/2 モデルで 4 角形 1 次要素メッシュを作成します。節点数は 9 で要素数は 4 です。



(2) 境界条件

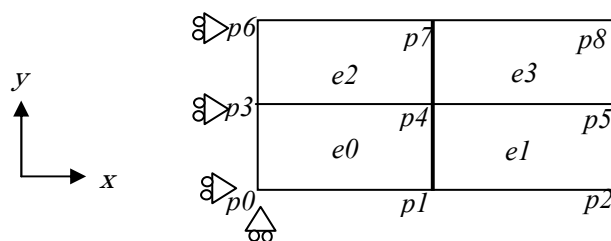
1) 荷重境界条件

トータル荷重として、4000kgf で引っ張り荷重を設定します。有限要素法では、節点毎に荷重を与えますので、等価節点荷重にして設定します。



2) 変位境界条件

変位境界として対象条件は、下記図のように、ローラ支持で拘束します。別の言い方をすると p6、p3、p の x 方向を拘束し、p0 の y 方向を拘束します。



2.4 ソルバの入力データ

```
#sample
<Analysis>
#Type is planeStress or planeStrain
AnalysisType planeStress
#Type is Direct or CG
SolverType Direct
</Analysis>
```

```
<Node>
# nodeid xcood ycood
0 0.0 0.0
1 1000 0.0
2 2000 0.0
3 0.0 500
4 1000 500
5 2000 500
6 0.0 1000
7 1000 1000
8 2000 1000
</Node>
```

```
<Element>
#ElementType is Quad4 or Tri3
ElementType Quad4
0 0 1 4 3 iron
1 1 2 5 4 iron
2 3 4 7 6 iron
3 4 5 8 7 iron
</Element>
```

```
<Material>
Name iron
YoungModulus 21000
PoissonRatio 0.3
Thichness 1.0
</Material>
```

```
<Displacement>
0 x 0.0
0 y 0.0
3 x 0.0
6 x 0.0
</Displacement>
```

```
<Load>
2 x 1000
5 x 2000
8 x 1000
</Load>
```

2.5 計算結果

```
<Displacement>
numItems 9
attributeType node
# nodeId x y
0 0.000000 0.000000
1 0.190476 -0.000000
2 0.380952 -0.000000
3 0.000000 -0.028571
4 0.190476 -0.028571
5 0.380952 -0.028571
6 0.000000 -0.057143
7 0.190476 -0.057143
8 0.380952 -0.057143
</Displacement>
```

```
<NodalForce>
numItems 9
attributeType node
# nodeId x y
0 -1000.000000 0.000000
1 -0.000000 -0.000000
2 1000.000000 0.000000
3 -2000.000000 0.000000
4 -0.000000 0.000000
5 2000.000000 -0.000000
6 -1000.000000 0.000000
7 0.000000 0.000000
8 1000.000000 -0.000000
</NodalForce>
```

```
<Strain>
numItems 4
attributeType element
# elementId ex ey ez rxy
0 0.000190 -0.000057 -0.000000
1 0.000190 -0.000057 -0.000000
2 0.000190 -0.000057 -0.000000
3 0.000190 -0.000057 -0.000000
</Strain>
```

```
<EquivalentStrain>
numItems 4
attributeType element
# elementId value
0 0.000225
1 0.000225
2 0.000225
3 0.000225
</EquivalentStrain>
```

```
<Stress>
numItems 4
attributeType element
# elementId sx sy txy
0 4.000000 0.000000 -0.000000
1 4.000000 0.000000 -0.000000
2 4.000000 0.000000 -0.000000
3 4.000000 -0.000000 -0.000000
</Stress>
```

```
<EquivalentStress>
numItems 4
attributeType element
# elementId value
0 4.000000
1 4.000000
2 4.000000
3 4.000000
</EquivalentStrain>
```

3. Appendix

3.1 平面応力で σ_z をなぜ近似的にゼロと扱ってよいか？

以下、説明のために詳細を無視して、

x, y 方向の長さに比べて、z 方向の厚さが十分に小さい場合、例えば、各方向の長さが、 $L_x=L_y=1000$, $L_z=t=1$ の板で、各方向に同じ外力 $F=1000$ が作用する場合の各辺の応力度は、

$$\sigma_x = F/A = F/(L_x \cdot t) = 1000/(1000 \times 1) = 1$$

$$\sigma_y = F/A = F/(L_y \cdot t) = 1000/(1000 \times 1) = 1$$

$$\sigma_z = F/A = F/(L_x \cdot L_y) = 1000/(1000 \times 1000) = 0.001$$

$$\rightarrow \sigma_x = \sigma_y \gg \sigma_z$$

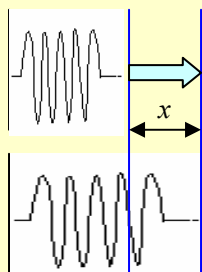
となり、z 方向の σ_z が無視できる状態を仮定できます。

ここで、工学的な仮定をする場合、「高次の部分を無視して」というのと同じ発想で、「(σ_x , σ_y) に比べて、明らかに小さい (σ_z) を無視する」ということです。

逆に言えば、板の場合の様に、z 方向に生じる応力度を無視できる形状のみに適用できる仮定が、平面応力状態です。

3.2 フックの法則

ばねの伸びは、以下の式で表されます。



引っ張る(F)

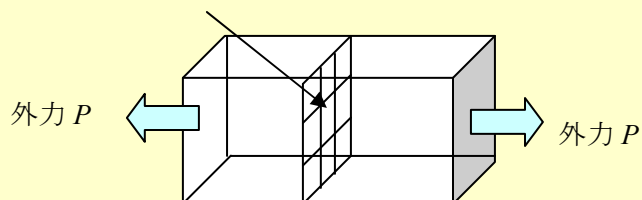
$$F = kx$$

F は、ばねを x 伸ばすことにより生じる力で、 k はばね定数です。ばね定数が大きいと大きな力で引っ張らないとばねは伸びません。よってばね定数は、ばねの硬さを表す定数であることが分かります。これをフックの法則と言います。材料力学の書籍の多くには、

$$\sigma = E\varepsilon$$

と書かれています。 σ は応力、 E はヤング率、 ε はひずみです。 F と σ 、 E と k 、 ε と x を読みかえれば E (ヤング率) が物の硬さを表していることがイメージできます。

応力 $[\sigma]$ は、仮想断面で分割した仮想表面に作用する単位面積当たりの力(内力)です。例えば 100 N/m^2 と表します。



応力はテンソル・・・、強度設定では主応力/相当応力が・・・と話は続いていきますが、ここでは、説明は省略します。