§３　<$\tan\theta$，$\cot\theta$に関する公式>

$\sin\theta$、$\cos\theta$のｄｅ・Moivreの公式による、「ｎ倍角」の公式の証明は、周知の通りである。§１，§２ではあえて、それに触れずに議論をしてきた。これは大体のところは高校のとき、勉強していれば自然に知るものである。さて、目標は$\tan\theta$，$\cot\theta$についての公式である。

ｄｅ･Moivreの公式とは、iを虚数単位としたとき、　$(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$　つまり、

$$\cos\left(\sum_{k=!}^{n}\theta_k\right)+i\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)=\prod_{k=1}^{n}(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)\quad\cdots\quad(3.\ 1)$$

である。ここに、ｎは自然数とする。

$\cos\theta\neq 0$のとき、$\cos\theta+i\sin\theta=\cos\theta(1+i\tan\theta)$　を用いて、

$$\prod_{k=1}^{n}(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$$

$$=(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)(\cos_2+i\sin\theta_2)\cdots(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$

$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n(1+i\tan\theta_1)(1+i\tan\theta_2)\cdots(1+i\tan\theta_n)\quad\cdots(3.\ 2)$$

そこで、

$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_n$を$\tan\theta_1,\tan\theta_2,\tan\theta_3,\cdots,\tan\theta_n$のそれぞれ１次、2次,・・・，ｎ次の基本対称式とすれば（　$\sigma_1=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3+\cdots+\tan\theta_n$，　$\sigma_n=\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3\cdots\tan\theta_n$などである。ただし、便宜上　$\sigma_0=1$とおく。）

$1=\sigma_0$　だから、

$$(1+i\tan\theta_1)(1+i\tan\theta_2)\cdots(1+i\tan\theta_n)$$

$$=\sigma_0+i\sigma_1+i^2\sigma_2+\cdots+i^n\sigma_n=1+i\sigma_1-\sigma_2-i\sigma_3+\sigma_4+\cdots+i^n\sigma_n$$

このことを正確に表現すると次のようになる。

「命題３．３」　（ア）ではmを１以上の整数,（イ）では、mを０以上の整数とすれば、$1=\sigma_0$に注意して

（ア）　ｎ＝$2m$のときは、$(1+i\tan\theta_1)(1+i\tan\theta_2)\cdots(1+i\tan\theta_n)$

$$=\{\sigma_0-\sigma_2+\sigma_4-\sigma_6+\cdots+(-1)^m\sigma_{2m}\}+i\{\sigma_1-\sigma_3+\sigma_5-\cdots+(-1)^{m-1}\sigma_{2m-1}\}$$

（イ）　ｎ＝$2m+1$のときは、

$$(1+i\tan\theta_1)(1+i\tan\theta_2)\cdots(1+i\tan\theta_n)$$

$$=\{\sigma_0-\sigma_2+\sigma_4-\sigma_6+\cdots+(-1)^m\sigma_{2m}\}+i\{\sigma_1-\sigma_3+\sigma_5-\cdots+(-1)^m\sigma_{2m+1}\}$$

（$\because i^2=-1$だから、よく考えればわかる）

◎　この式は　ガウス記号　[ ]を用いれば見やすくなる。

ｎ＝$2m\Rightarrow\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{2m}{2}\right]=m$，また　$n-1=2m-1\Rightarrow\left[\frac{n-1}{2}\right]=\left[\frac{2m-1}{2}\right]=\left[m-\frac{1}{2}\right]=m-1$

ｎ＝$2m+1\Rightarrow\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{2m+1}{2}\right]=\left[m+\frac{1}{2}\right]=m$また、$\left[\frac{n-1}{2}\right]=\left[\frac{2m}{2}\right]=[m]=m$。

「補題３．４」　mを整数とすれば、

（ア）　$n=2m$のとき、$m=\left[\frac{n}{2}\right]$，$m-1=\left[\frac{n-1}{2}\right]$

（イ）　$n=2m+1$のとき、$m=\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]$

これと、１＝σ_0より、「命題３．３」は次のようにまとまる。

「命題３．５」

n　を自然数とすれば、

$$(1+i\tan\theta_1)(1+i\tan\theta_2)\cdots(1+i\tan\theta_n)=\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l\sigma_{2l}+i\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l\sigma_{2l+1}\quad\cdots(3.\ 5)$$

「証明」

（ア）　$n=2m$のとき、「補題３．４」より、$m=\left[\frac{n}{2}\right]$　よって　$l=\left[\frac{n}{2}\right]$のとき、$l=m$，

$2l=2\left[\frac{n}{2}\right]=2m$，また「補題３．４」より、　$l=\left[\frac{n-1}{2}\right]$のとき、$l=m-1$，

$2l+1=2\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)+1=2(m-1)+1=2m-1$。故に

「命題３．３」の（ア）はこのようにかける。

次に（イ）$n=2m+1$のときは、「補題３．４」より、$m=\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]$、よって、

$l=\left[\frac{n}{2}\right]$ のとき $2l=2m$，また　$l=\left[\frac{n-1}{2}\right]$ のとき $l=m$，$2l+1=2\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)+1=2m+1$。

故に、「命題３．３」の（イ）もこのようにかける。　(Q.E.D.)

◎　式　（３．１）（３．２）と上の「命題３．５」から、
次の公式を得る。

「主公式３．６」

$$\cos\left(\sum_{k=!}^{n}\theta_k\right)==\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n\times\left(\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l\sigma_{2l}\right)\quad\cdot\cdot\cdot（３．６．１）$$

$$\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)==\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n\times\left(\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l\sigma_{2l+1}\right)\quad\cdot\cdot\cdot（３．６．２）$$

ここに、$\sigma_{0,}\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_n$ は $\tan\theta_1,\tan\theta_2,\tan\theta_3,\cdots,\tan\theta_n$ のそれぞれ０次、１次、２次,・・・，ｎ次の基本対称式とする。つまり、

$\sigma_0=1$，　$\sigma_1=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3+\cdots+\tan\theta_n$，

$\sigma_2=\tan\theta_1\tan\theta_2+\tan\theta_1\tan\theta_3+\cdots+\tan\theta_1\tan\theta_n+\cdots+\tan\theta_{n-1}\tan\theta_n$，

・・・・・・，$\sigma_n=\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3\cdots\tan\theta_n$　とする。

「証明」

$$\cos\left(\sum_{k=!}^{n}\theta_k\right)+i\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)=\prod_{k=1}^{n}(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$$

$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n(1+i\tan\theta_1)(1+i\tan\theta_2)\cdots(1+i\tan\theta_n)$$

$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n\times\left\{\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l\sigma_{2l}+i\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l\sigma_{2l+1}\right\}$$

$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n\times\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l\sigma_{2l}+i\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n\times\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l\sigma_{2l}$$

の実部と虚部をそれぞれ比較すれば得られる。(Q.E.D.)

「実例」

$n=3$ としてみると、（３．６．１）は、

$$\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)==\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\times\sum_{l=0}^{\left[\frac{3}{2}\right]}(-1)^l\sigma_{2l}$$

$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\times\{\sigma_0-\sigma_2)$$

$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\times\{1-(\tan\theta_1\tan\theta_2+\tan\theta_1\ \tan\theta_3+\tan\theta_2\ \tan\theta_3)\}$$

$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3-\cos\theta_3\sin\theta_1\sin\theta_2-\cos\theta_2\sin\theta_1\sin\theta_3-\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3$$

ここで、$\theta_1=\alpha,\theta_2=\beta,\theta_3=\gamma$ とすれば、「命題１．１」の（Ⅱ）式が得られる。

$n=4$ としてみると、（３．６．２）は、$\left[\frac{n-1}{2}\right]=\left[\frac{4-1}{2}\right]=1$ だから、

$$\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)==\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4\times(\sigma_1-\sigma_3)$$

$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4\times$$

$$\{\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3+\tan\theta_4-(\tan\theta_1\ \tan\theta_2\ \tan\theta_3+\tan\theta_1\ \tan\theta_2\ \tan\theta_4+\tan\theta_1\ \tan\theta_3\ \tan\theta_4+\tan\theta_2\ \tan\theta_3\ \tan\theta_4)\}$$

$$=\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4+\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\theta_3\cos\theta_4+\sin\theta_3\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_4+\sin\theta_4\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3$$

$$-\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4-\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_4\cos\theta_3-\sin\theta_1\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_2-\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_1$$

となって、$\theta_1=\alpha,\theta_2=\beta,\theta_3=\gamma,\theta_4=\delta$ とおけば、「命題１．２」の（Ⅰ）式が得られる。

（実例終了）

§４　「主公式３．６」により、次の $\sin\theta$，$\cos\theta$ のｎ倍角の公式が得られる。

「公式４．１」$\sin\theta$，$\cos\theta$ のｎ倍角の公式

（ア）　$$\cos n\theta = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^l {}_nC_{2l} \cos^{n-2l}\theta \sin^{2l}\theta \quad \cdots（４．１．１）$$

（イ）　$$\sin n\theta = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^l {}_nC_{2l+1} \cos^{n-(2l+1)}\theta \sin^{2l+1}\theta \cdots（４．１．１）$$

「証明」「主公式３．６」で、$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \cdots = \theta_n = \theta$ とおくとき、$\sigma_0 = 1 = {}_nC_0$

$\sigma_1 = \tan\theta_1 + \tan\theta_2 + \tan\theta_3 + \cdots + \tan\theta_n = n\tan\theta = {}_nC_1 \tan\theta$,

$\sigma_2 = \tan\theta_1 \tan\theta_2 + \tan\theta_1 \tan\theta_3 + \cdots + \tan\theta_1 \tan\theta_n + \cdots + \tan\theta_{n-1} \tan\theta_n$

$= {}_nC_2 \tan^2\theta$ ，・・・・，一般に基本対称式の定義より　$\sigma_k = {}_nC_k \tan^k\theta$ が成立する。

よって、$\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots \cos\theta_n = \cos^n\theta$ にも注意すれば、

$$\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots \cos\theta_n \times \left(\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^l \sigma_{2l} \right) = \cos^n\theta \times \left(\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^l {}_nC_{2l} \tan^{2l}\theta \right)$$

$$= \cos^n\theta \times \left(\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^l {}_nC_{2l} \frac{\sin^{2l}\theta}{\cos^{2l}\theta} \right) = \left(\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^l {}_nC_{2l} \cos^n\theta \times \frac{\sin^{2l}\theta}{\cos^{2l}\theta} \right) \cdots（４・２・１）$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^l {}_nC_{2l} \cos^{n-2l}\theta \sin^{2l}\theta \right)$$，同様に

$$\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cdots \cos\theta_n \times \left(\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^l \sigma_{2l+1} \right) = \left(\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^l \cos^n\theta \times {}_nC_{2l+1} \frac{\sin^{2l+1}\theta}{\cos^{2l+1}\theta} \right)$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^l {}_nC_{2l+1} \cos^{n-(2l+1)}\theta \sin^{2l+1}\theta \right)$$ ・・・（４・２・２）により、容易に

（４・１・１），（４・１・２）を得る。　(Q.E.D.)

「補注」　なおこの $\sin\theta$，$\cos\theta$ のｎ倍角の公式は、数学辞典に載っているし、de・Moivre の定理より、普通すぐに求める。このとき、「補題３．４」等に気が付かないと公式がきれいにならない。

§５　$\tan\theta$ の加法定理

§４の $\sin\theta$，$\cos\theta$ のｎ倍角の公式は、周知の通りであって面白くない。§１～§２と、§４とは、「おまけ」であって「初めから§３のようにやって行き、『主公式３．６』を大体導いた。」このとき、岩波の「数学辞典」の $\sin\theta$，$\cos\theta$ のｎ倍角の公式の「綺麗な記法」つまり、ガウス記号を用いることを参考にした。さて、「主公式５．１」を述べる。

「主公式５．１」

$$\tan\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) = \frac{\displaystyle\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^l \sigma_{2l+1}}{\displaystyle\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^l \sigma_{2l}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_5 - \cdots + (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sigma_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}}{1 - \sigma_2 + \sigma_4 - \cdots + (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sigma_{2\left[\frac{n}{2}\right]}}$$

$$= \frac{\sum \tan\theta_1 - \sum \tan\theta_1 \tan\theta_2 \tan\theta_3 + \cdots + (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum \tan\theta_1 \tan\theta_2 \cdots \tan\theta_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}}{1 - \sum \tan\theta_1 \tan\theta_2 + \sum \tan\theta_1 \tan\theta_2 \tan\theta_3 \tan\theta_4 - \cdots + (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum \tan\theta_1 \tan\theta_2 \cdots \tan\theta_{2\left[\frac{n}{2}\right]}}$$

・・・（５．１．１）

ここで、記号Σの意味は、「代数学の慣用法」に従っている。（高校流と少し違う）

「証明」一般に $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　だから§３の「主公式３．６」の $\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)$ を $\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)$ で割れば証明される。(Q.E.D.)

「定理５．２」＜$\tan\theta$ の「ｎ倍角・・・$\tan n\theta$」の公式＞　n を自然数とする。このとき

$$\tan n\theta = \frac{{}_nC_1 \tan\theta - {}_nC_3 \tan^3\theta + \cdots + (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} {}_nC_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} \tan^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}\theta}{1 - {}_nC_2 \tan^2\theta + {}_nC_4 \tan^4\theta - \cdots + (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}_nC_{2\left[\frac{n}{2}\right]} \tan^{2\left[\frac{n}{2}\right]}\theta}$$

「証明」上の「主公式５．１」で、$\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$ とおけば、あとは対称式の定義より分かる。　(Q.E.D.)

§６　$\cot\theta$ の加法定理、及びｎ倍角の公式・・・この拙文を作成している内に完成した。

◎　$\cot\theta$ の加法定理を導くためには、少し準備がいる。以下手短かに述べる。

$\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta - i\sin\theta) = i\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$ であるから、

$\boxed{\sin\theta + i\cos\theta = i\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}}$　　ゆえに　de・Moivre の公式を用いて、

$$\prod_{k=1}^{n}(\sin\theta_k + i\cos\theta_k) = i^n\left\{\cos\left(-\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) + i\sin\left(-\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)\right\} = i^{n-1}\left\{\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) + i\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)\right\}$$

そこで、$i^{4n} = 1$ を用いて

つまり、　$\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) + i\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) = i^{3n+1}\prod_{k=1}^{n}(\sin\theta_k + i\cos\theta_k)$　・・（６．１）の形になる。

こうして、

「命題６．２」

$$\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) + i\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) = i^{3n+1}\prod_{k=1}^{n}(\sin\theta_k + i\cos\theta_k) = (-1)^n i^{n+1}\prod_{k=1}^{n}(\sin\theta_k + i\cos\theta_k)\quad\cdots(6.2)$$

を得た。さて、§３の「命題３．５」の証明をよく見れば、次の命題がもっと一般に成り立つことが分かる。

「命題６．３」

n を自然数，$z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ を複素数とし、$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_n$ を $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ のそれぞれ

0次，１次　２次,・・・，ｎ次の基本対称式とすれば、

（ 例えば$\sigma_0 = 1$，$\sigma_1 = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$，・・・，$\sigma_n = z_1 z_2 \times\cdots\times z_n$　）

$$(1+iz_1)(1+iz_2)(1+iz_3)\cdots(1+iz_n) = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l\sigma_{2l} + i\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l\sigma_{2l+1}\quad\cdots(6.3.1)$$

これを用いれば

$$(-1)^n i^{n+1}\prod_{k=1}^{n}(\sin\theta_k + i\cos\theta_k) = (-1)^n i^{n+1}\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_n \times \prod_{k=1}^{n}(1 + i\cot\theta_k)$$

$$= (-1)^n i^{n+1}\sin\theta_1\sin\theta_2\times\cdots\times\sin\theta_n \times\left\{\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l s_{2l} + i\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l s_{2l+1}\right\}$$

「命題６．２」から、（ただし$z_k = \cot\theta_k$　とし、$s_1 = \cot\theta_1 + \cot\theta_2 + \cdots + \cot\theta_n$ などとしている）

$$\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) + i\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) = (-1)^n i^{n+1}\sin\theta_1\sin\theta_2\times\cdots\times\sin\theta_n\times\left\{\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l s_{2l} + i\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l s_{2l+1}\right\}$$

・・・（６．３．２）　となる。

そこで、（ア）　$n = 2m$ のとき、$i^{n+1} = i^{2m}\times i = (-1)^m\times i$　だから　（６．３．２）の右辺

$$= (-1)^n i^{n+1}\sin\theta_1\sin\theta_2\times\cdots\times\sin\theta_n\times\left\{\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l s_{2l} + i\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l s_{2l+1}\right\}$$

$$= (-1)^n(-1)^m\sin\theta_1\sin\theta_2\times\cdots\times\sin\theta_n\times\left\{-\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l s_{2l+1} + i\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l s_{2l}\right\}$$

$$= (-1)^n(-1)^{m+1}\sin\theta_1\sin\theta_2\times\cdots\times\sin\theta_n\times\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l s_{2l+1}$$

$$+ i(-1)^n(-1)^m\sin\theta_1\sin\theta_2\times\cdots\times\sin\theta_n\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l s_{2l}$$

（イ）$n = 2m+1$ のとき、$i^{n+1} = i^{2m+2} = (-1)^{m+1}$ だから

$$(-1)^n i^{n+1}\sin\theta_1\sin\theta_2\times\cdots\times\sin\theta_n\times\left\{\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l s_{2l} + i\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l s_{2l+1}\right\}$$

$$= (-1)^n(-1)^{m+1}\sin\theta_1\sin\theta_2\times\cdots\times\sin\theta_n\times\left\{\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l s_{2l} + i\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l s_{2l+1}\right\}$$

これより、式（６．３．２）の実部・虚部を比較して§３の主公式（３．６）に対応する次の公式を得る。

「公式６．４」

（ア）　$n = 2m$ のとき、

$$\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) = (-1)^n(-1)^m\sin\theta_1\sin\theta_2\times\cdots\times\sin\theta_n\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l s_{2l}\quad\cdots(6.4.1)$$

$$\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) = (-1)^n(-1)^{m+1}\sin\theta_1\sin\theta_2\times\cdots\times\sin\theta_n\times\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l s_{2l+1}\quad\cdots(6.4.2)$$

（イ） $n=2m+1$ のとき、

$$\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)=(-1)^n(-1)^{m+1}\sin\theta_1\sin\theta_2\times\cdots\times\sin\theta_n\times\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l s_{2l+1} \quad \cdot\cdot\cdot（６．４．３）$$

$$\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)=(-1)^n(-1)^{m+1}\sin\theta_1\sin\theta_2\times\cdots\times\sin\theta_n\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l s_{2l} \quad \cdot\cdot\cdot（６．４．４）$$

ここに、$s_0,s_1,s_2,s_3,\cdots,s_n$ は$\cot\theta_1,\cot\theta_2,\cot\theta_3,\cdots,\cot\theta_n$ のそれぞれ、０次、１次,２次,・・・, ｎ次の基本対称式である。

（例えば$s_0=1$，$s_1=\cot\theta_1+\cot\theta_2+\cdots+\cot\theta_n$，・・・，$s_n=\cot\theta_1\cot\theta_2\times\cdots\times\cot\theta_n$）

「命題６．５」　＜<u>cot θ の一般の加法公式</u>＞

（ア）　n が<u>偶数</u>のとき

$$\cot\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)=-\frac{\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l s_{2l}}{\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l s_{2l+1}}=-\frac{s_0-s_2+s_4-\cdots+(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}s_{2\left[\frac{n}{2}\right]}}{s_1-s_3+s_5-\cdots+(-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}s_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}}$$

$$=-\frac{1-\sum\cot\theta_1\cot\theta_2+\sum\cot\theta_1\cot\theta_2\cot\theta_3\cot\theta_4-\cdots+(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum\cot\theta_1\cot\theta_2\cdots\cot\theta_{2\left[\frac{n}{2}\right]}}{\sum\cot\theta_1-\sum\cot\theta_1\cot\theta_2\cot\theta_3+\cdots+(-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sum\cot\theta_1\cot\theta_2\cdots\cot\theta_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}}$$

（イ） n が<u>奇数</u>のとき

$$\cot\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)=\frac{\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^l s_{2l+1}}{\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l s_{2l}}=\frac{s_1-s_3+s_5-\cdots+(-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}s_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}}{s_0-s_2+s_4-\cdots+(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}s_{2\left[\frac{n}{2}\right]}}$$

$$=\frac{\sum\cot\theta_1-\sum\cot\theta_1\cot\theta_2\cot\theta_3+\cdots+(-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sum\cot\theta_1\cot\theta_2\cdots\cot\theta_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}}{1-\sum\cot\theta_1\cot\theta_2+\sum\cot\theta_1\cot\theta_2\cot\theta_3\cot\theta_4-\cdots+(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum\cot\theta_1\cot\theta_2\cdots\cot\theta_{2\left[\frac{n}{2}\right]}}$$

「証明」

一般に$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$　だから、上の「公式６．４」から分かる。(Q.E.D.)

「命題６．６」
＜<u>cot θ のｎ倍角の公式</u>＞　　n を自然数とする。

（ア）　n が<u>偶数</u>のとき

$$\cot n\theta=-\frac{1-{}_nC_2\cot^2\theta+{}_nC_4\cot^4\theta-\cdots+(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_nC_{2\left[\frac{n}{2}\right]}\cot^{2\left[\frac{n}{2}\right]}\theta}{{}_nC_1\cot\theta-{}_nC_3\cot^3\theta+\cdots+(-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}_nC_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}\cot^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}\theta}$$

（イ） n が<u>奇数</u>のとき

$$\cot n\theta=\frac{{}_nC_1\cot\theta-{}_nC_3\cot^3\theta+\cdots+(-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}_nC_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}\cot^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}\theta}{1-{}_nC_2\cot^2\theta+{}_nC_4\cot^4\theta-\cdots+(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_nC_{2\left[\frac{n}{2}\right]}\cot^{2\left[\frac{n}{2}\right]}\theta}$$

「証明」「命題６．５で」$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$ とおけば、あとは基本対称式の定義より分かる。　(Q.E.D.)

２００１年9月８日（土）