第1章　テスト粒子解析

本章では、テスト粒子解析手法について概説する。テスト粒子解析は、ある与えられた電磁界環境の中でプラズマ粒子がどのような振る舞いをするかを計算するものであり、プラズマ粒子の運動による電流変化は電磁界環境にはフィードバックされない。粒子の速度更新は微小時間ステップ Δt 毎に行い、これにより粒子の軌跡や加速減速を見る。ここで述べる速度更新や位置更新の手法は後述する電磁粒子シミュレーションやハイブリッドシミュレーションに用いられる。

一般に宇宙プラズマは十分い希薄であり、粒子相互間の衝突はほとんど無視することができる。したがって、本章では衝突項を含まない粒子の運動方程式を考える。相対論的効果を無視すれば、運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{q}{m}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \boldsymbol{v} \tag{1.2}$$

ここで、$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{r}$, q, m, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ はそれぞれ、粒子の速度ベクトル、位置ベクトル、電荷、質量、電界ベクトル、磁界ベクトルとする。

上の方程式を用いて粒子速度を時間ステップ Δt 毎に解き進めていく代表的な方法はいくつかある。それらについて以下説明する。

1.1　Euler 法

変数 t、t の関数 $v(t)$ として、$v(t)$ の満たすべき微分方程式と初期条件

$$\frac{dv(t)}{dt} = f(v,t) \tag{1.3}$$

$$v(t=0) = v_0 \tag{1.4}$$

を与えて、$v(t)$ を求める問題を考える。離散的に解くもっとも簡単な方法は、

$$\frac{dv}{dt} \sim \frac{v^{n+1} - v^n}{t^{n+1} - t^n} = \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} \tag{1.5}$$

から、

$$v^{n+1} = v^n + f(v^n, t^n)\Delta t \tag{1.6}$$

として計算するもので、Euler 法という。しかし、この方法は、後述の方法に比べ誤差が大きい。

1.2　修正 Euler 法

t^n から t^{n+1} まで積分するとき、$f(v^n, t^n)$ だけを用いるのではなく、$f(v^n, t^n)$ と予測した $f(v^{n+1}, t^{n+1})$ を用いると精度が良くなる。この方法は、修正 Euler 法という。予測の方法は、

$$k_1 = f(v^n, t^n) \tag{1.7}$$
$$v^{n+1} = v^n + k_1\Delta t \tag{1.8}$$
$$k_2 = f(v^{n+1}, t^n + \Delta t) \tag{1.9}$$

と予測値を求め、

$$v^{n+1} = v^n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\Delta t \tag{1.10}$$

と、v^{n+1} を求めなおす。

1.3　Runge-Kutta 法

さらに、４つの予測値を使う方法が、ルンゲクッタ法である。

$$k_1 = f(v^n, t^n) \tag{1.11}$$
$$v_2 = v^n + k_1\frac{\Delta t}{2} \tag{1.12}$$
$$k_2 = f(v_2, t^n + \frac{\Delta t}{2}) \tag{1.13}$$
$$v_3 = v^n + k_2\frac{\Delta t}{2} \tag{1.14}$$
$$k_3 = f(v_3, t^n + \frac{\Delta t}{2}) \tag{1.15}$$
$$v_4 = v^n + k_3\Delta t \tag{1.16}$$
$$k_4 = f(v_4, t^n + \Delta t) \tag{1.17}$$

と予測値を求め、

$$v^{n+1} \ = \ v^n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t \tag{1.18}$$

と、v^{n+1} 求める。

1.4 Buneman-Boris 法

式 (1.1) の差分表現は以下のようになる。

$$\frac{\boldsymbol{v}^{n+1/2} - \boldsymbol{v}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{m}(\boldsymbol{E}^n + \frac{\boldsymbol{v}^{n+1/2} + \boldsymbol{v}^{n-1/2}}{2} \times \boldsymbol{B}^n) \tag{1.19}$$

式を見てわかるように、時間 $n\Delta t$ における式展開になっている。ただし、$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ は粒子位置での電界値および磁界値である。この式から $\boldsymbol{v}^{n+1/2}$ の値を計算するには以下のような方法を用いる。

まず、新しい変数として $\boldsymbol{v}^-$ と $\boldsymbol{v}^+$ を以下のように定義し導入する。

$$\boldsymbol{v}^- \ = \ \boldsymbol{v}^{n-1/2} + \frac{q}{m}\boldsymbol{E}^n\frac{\Delta t}{2} \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{v}^+ \ = \ \boldsymbol{v}^{n+1/2} - \frac{q}{m}\boldsymbol{E}^n\frac{\Delta t}{2} \tag{1.21}$$

すなわち、$\boldsymbol{v}^{n-1/2}$ から電界 $\boldsymbol{E}^n$ で $\Delta t/2$ だけ加速を受けた後の速度、および $\boldsymbol{v}^{n+1/2}$ から電界 $\boldsymbol{E}^n$ で $\Delta t/2$ だけ加速を受ける前の速度を意味する。これらの変数を用いて式 (1.19) を書き換えると以下のようになる。

$$\frac{\boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}^-}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{q}{m}(\boldsymbol{v}^+ + \boldsymbol{v}^-) \times \boldsymbol{B}^n \tag{1.22}$$

この意味は、$\boldsymbol{v}^+$ から $\boldsymbol{v}^-$ へ変化する間に $\frac{q}{m}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ のローレンツ力によるサイクロトロン回転のみが作用するということである。

この式の両辺について $(\boldsymbol{v}^+ + \boldsymbol{v}^-)$ との内積をとると $(\boldsymbol{v}^+)^2 = (\boldsymbol{v}^-)^2$ となる。すなわち、図 1.1 に示されたように、式 (1.22) は $\boldsymbol{v}^+$ は $\boldsymbol{v}^-$ は大きさが同じで、角度 θ だけ回転させたものであることを示す。つまり、式 (1.19) を $\Delta t/2$ 分の電界による加速 2 回と、Δt 分のサイクロトロン回転とに分離したことになる。

詳細は省くが、式 (1.22) を整理すると、

$$\boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}^- + \frac{2}{1 + \boldsymbol{T}^2}(\boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{v}^- \times \boldsymbol{T}) \times \boldsymbol{T} \tag{1.23}$$

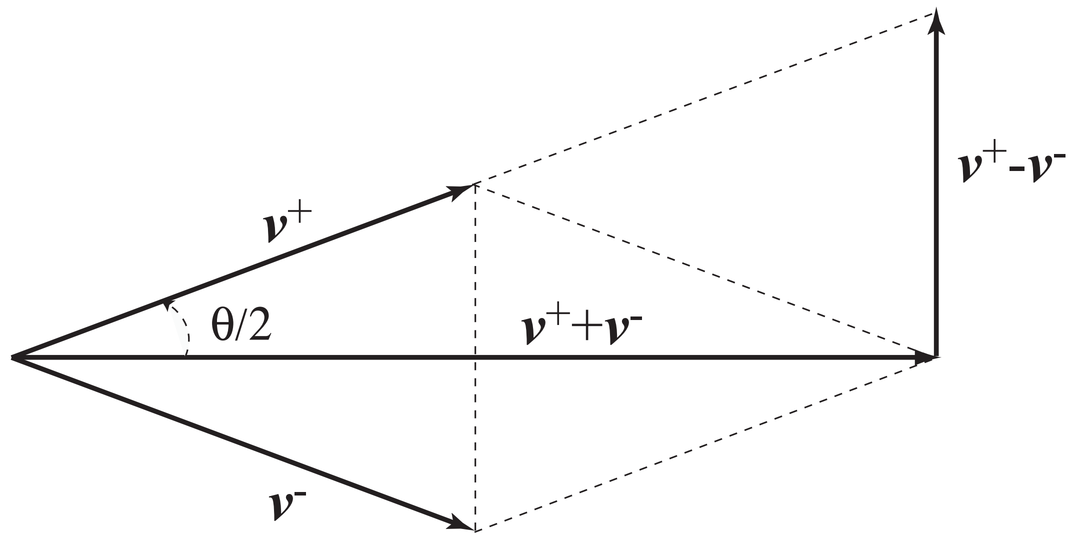

図 1.1: Vector relation in Byneman-Boris method

となる。ただし、$\boldsymbol{T} = (q/m)\Delta t \boldsymbol{B}^n/2$ と定義する。上の式で括弧内を $\boldsymbol{v}^o$ とすると、$\boldsymbol{v}^-$ から $\boldsymbol{v}^+$ への計算は

$$\boldsymbol{v}^o = \boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{v}^- \times \boldsymbol{T} \tag{1.24}$$
$$\boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{v}^o \times \boldsymbol{S} \tag{1.25}$$

ただし、$\boldsymbol{S} = 2\boldsymbol{T}/(1+\boldsymbol{T}^2)$ とする。

以上をまとめると、粒子の速度更新には以下の 4 ステップの計算を行うことになる。

$$\boldsymbol{v}^- = \boldsymbol{v}^{n-1/2} + \frac{q}{m}\boldsymbol{E}^n\frac{\Delta t}{2} \tag{1.26}$$
$$\boldsymbol{v}^o = \boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{v}^- \times \boldsymbol{T} \tag{1.27}$$
$$\boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{v}^o \times \boldsymbol{S} \tag{1.28}$$
$$\boldsymbol{v}^{n+1/2} = \boldsymbol{v}^+ + \frac{q}{m}\boldsymbol{E}^n\frac{\Delta t}{2} \tag{1.29}$$

この計算方法を Buneman-Boris 法という。

速度がわかれば粒子位置 r は速度 v を時間的に積分することにより得られる。

$$x^{n+1} = x^n + v_x^{n+1/2}\Delta t \tag{1.30}$$

1.5　逆行列

一般性を欠くが、以下のような方法もある。式 (1.19) を成分で書くと、

$$m\begin{pmatrix} v_x^{n+1/2}-v_x^{n-1/2} \\ v_y^{n+1/2}-v_y^{n-1/2} \\ v_z^{n+1/2}-v_z^{n-1/2} \end{pmatrix}\Delta t = q\begin{pmatrix} E_x^n \\ E_y^n \\ E_z^n \end{pmatrix} + q\frac{1}{2}\begin{pmatrix} v_x^{n+1/2}+v_x^{n-1/2} \\ v_y^{n+1/2}+v_y^{n-1/2} \\ v_z^{n+1/2}+v_z^{n-1/2} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} B_x^n \\ B_y^n \\ B_z^n \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

これを $\boldsymbol{v^{n+1/2}}$ について解くと、

$$\boldsymbol{v^{n+1/2}} = \boldsymbol{A}(\frac{q}{m}\boldsymbol{E}\Delta t + 2\boldsymbol{v^{n-1/2}}) - \boldsymbol{v^{n-1/2}} \tag{1.32}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} 4+B_x^2 & B_xB_y+2B_z & B_zB_x+2B_y \\ B_xB_y+2B_z & 4+B_y^2 & B_yB_z+2B_x \\ B_zB_x+2B_y & B_yB_z+2B_x & 4+B_z^2 \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

$$D = 4+B_x^2+B_y^2+B_z^2 \tag{1.34}$$

$$B_x = \frac{q}{m}B_x^n\Delta t \tag{1.35}$$

$$B_y = \frac{q}{m}B_y^n\Delta t \tag{1.36}$$

$$B_z = \frac{q}{m}B_z^n\Delta t \tag{1.37}$$

となり、時間を進めることができる。