$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right) \qquad n = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_s^{e_s}$$

H27.10.26.

集合 $S(n)=\{1,2,\cdots,n\}$

素因子pに対して pの倍数になるSの元の集合を $S'(p)$で表すとき、

$S'(p) = pS\left(\frac{n}{p}\right)$

例. $n=6$, $p=2$ $S'(2)=2S\left(\frac{6}{2}\right)=2S(3)=2\{1,2,3\}=\{2,4,6\}$

$W_n = S(n) - \bigcup_{j=1}^{s} S'(p_j)$ は $a<n$ かつ nと互いに素なaの集合

W_nの元の個数 $\varphi(n)$ が オイラー関数

集合Tについてその元の個数を$|T|$で示す。

$|S'(p_j)| = \frac{n}{p_j}$, $|S'(p_jp_k)| = \frac{1}{p_jp_k}$

例. $n=12=2^2\cdot3$

$S'(2)=\{2,4,6,8,10,12\}$

$S'(3)=\{3,6,9,12\}$ $S'(6)=\{6,12\}$

$|S'(2)|=\frac{12}{2}=6$ $|S'(6)|=\frac{12}{6}=2$

$|S'(3)|=\frac{12}{3}=4$.

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= |W_n| \\ &= \left|S(n) - \bigcup_{j=1}^{s} S'(p_j)\right| \\ &= |S(n)| - \left|\bigcup_{j=1}^{s} S'(p_j)\right|\end{aligned}$$

包含関係の公式

集合Sの部分集合 $A_1, A_2, \cdots A_s$について

$$\left|\bigcup_{j=1}^{s} A_j\right| = \sum_{j=1}^{s}|A_j| - \sum_{j<k}^{s}|A_j\cap A_k| + \sum_{j<k<l}^{s}|A_j\cap A_k\cap A_l| - \cdots$$

包含関係の公式を用いて

$$\begin{aligned} &= n - \sum_{j=1}^{s}|S'(p_j)| + \sum_{j<k}^{s}|S'(p_jp_k)| - \cdots \\ &= n - \left(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\cdots+\frac{n}{p_s}\right) + \left\{\frac{n}{p_1p_2}+\cdots\frac{n}{p_{s-1}p_s}\right\} - \cdots + (-1)^{s-1}\frac{n}{p_1p_2\cdots p_n} \\ &= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\end{aligned}$$

例. $n=12$, $\varphi(n)=12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$=12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=4$