

$a^2+b^2=c^2$ が既約ピタゴラス数 (a, b, c が共通因子を持たない) の場合、
 a, b の一方は偶数でもう一方は奇数であり、 c は常に奇数となる。

H27, 12, 13

1. a と b が共に偶数の場合、 c も偶数となり、 a, b, c が共通因子2を持ち、既約であることに反する。
2. a と b が共に奇数の場合、 c は偶数となる。

$$a = 2x + 1, \quad b = 2y + 1, \quad c = 2z \quad \text{と代入}$$

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 = (2z)^2$$

$$4x^2 + 4x + 4y^2 + 4y + 2 = 4z^2$$

両辺を2で割ると

$$2x^2 + 2x + 2y^2 + 2y + 1 = 2z^2$$

左辺は奇数、右辺は偶数となり矛盾。

以上より a, b の一方は奇数、他一方は偶数。式を見るには c は奇数となる。