微分積分学B 演習問題

この問題に関するヒントなどは http://www35.atwiki.jp/mathlec/ を参照して下さい.

1. $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ について，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

2. 2 変数関数 F を $F(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{2t}}$ で与えたとき, $F(x,t)$ は等式 $\dfrac{\partial F}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ.

3. f, g を C^2 級の一変数関数，c を 0 でない定数とする．$F(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct)$ とすると，$F(x,t)$ は

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=0$$

を満たすことを示せ.

4. $g(r)$ を C^2 級の関数とし，二変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=g(r)$（ただし，$r=\sqrt{x^2+y^2}$）で定める．このとき，以下の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{d^2 g}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dg}{dr}$ が成り立つことを示せ.

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ を満たしているならば，$g(r)=C_1\log r+C_2$ (C_1, C_2 は定数) となっていることを示せ.

5. 以下の $f(x,y)$ について，曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(1,1,f(1,1))$ での接平面の方程式を求めよ.

(1) $f(x,y)=\sqrt{6-x^2-3y^2}$　　(2) $f(x,y)=\arctan\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$

6. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$ とする．このとき，以下の問に答えよ.

(1) f は $(x,y)=(0,0)$ で偏微分可能であることを示せ.

(2) f は $(x,y)=(0,0)$ で連続かどうかを調べよ.

(3) 曲面 $z=f(x,y)$ は原点で接平面をもつかどうかを理由を付して述べよ.

7. $f(x,y)$ を C^2 級の関数とする．$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ をとおして f を r, θ の関数とみたとき，以下の問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を r, θ に関する偏微分であらわせ.

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を r, θ に関する偏微分であらわせ.

8. c を 0 でない定数として，以下の問に答えよ.

(1) C^2 級の 2 変数関数 $F(x,t)$ を関係式 $u=x-ct$, $v=x+ct$ をとおして u,v の関数とみたとき次の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}.$$

(2) C^2 級の 2 変数関数 $F(x,t)$ が等式 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}=0$ を満たしているとき，F は 2 つの C^2 級の 1 変数関数 f, g を用いて，$F(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct)$ とかけることを示せ.

9. 次の 2 変数関数の極値を求めよ．

(1) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ (2) $f(x,y) = xy(x^2+y^2-1)$ (3) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + y^3$

10. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 0$ の範囲における $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$ の最大値・最小値を求めよ．

11. 点 $(1,2)$ で曲線 $x^3 + x^2y^4 - 2y^3 = 1$ と接する接線の方程式を求めよ．

12. 点 $(1,1,1)$ で曲面 $x^2 + y^2 + 3z^2 = 5$ と接する接平面の方程式を求めよ．

13. $s = y/x^2,\ t = x/y^2$ で xy 平面内の領域 $\{\,(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\,\}$ と st 平面内の領域 $\{\,(s,t) \mid s > 0,\ t > 0\,\}$ が一対一に対応している．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}$ を $x,\ y$ で表せ．

(2) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ を $x,\ y$ で表せ．

（注）記号の使い方が教科書でのそれと異なっていたことに注意．

14. $f(x,y) = 0$ で x の関数 $y = y(x)$ が決まっているとき，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を f の偏導関数を用いて表せ．ただし，f は C^2 級とする．

15. $f(x,y,z) = 0$ で $x,\ y$ の関数 $z = z(x,y)$ が決まっているとき，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を f の偏導関数を用いて表せ．ただし，f は C^2 級とする．

16. 以下の方程式で与えられる曲線について点 $(2,-2,1)$ での接線を求めよ．

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad x + y + z = 1$$

17. Lagrange の未定乗数法を用いて，条件 $4x^2 + 2xy + y^2 = 1$ の下で $x + 2y$ の最大値・最小値を求めよ．

18. Lagrange の未定乗数法を用いて，条件 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ の下で $(x + y + x)^2$ の最大値・最小値を求めよ．

19. 重積分 $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x}{(1+xy)^2} dxdy$ は次の二通りの累次積分

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{(1+xy)^2} dx \right) dy, \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{(1+xy)^2} dy \right) dx$$

に書き換えることができる．これらを実際に計算し等しくなることを確認せよ．

20. 積分 $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[a,b]} x^y \, dx \, dy$ を二通りの累次積分で計算することにより，$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx = \log \frac{b+1}{a+1}$ を示せ．ただし，$0 \leq a < b$ であるとする．

21. 以下の積分を累次積分の順序を変えて二通りの方法で計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 y \, dx \, dy,\ \ D = \{\,(x,y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\,\}.$

(2) $\displaystyle\iint_D (3x - 2y) \, dx \, dy,\ \ D = \{\,(x,y) \mid x \leq y \leq 2x,\ x + y \leq 6\,\}.$

(3) $\displaystyle\iint_D y \, dx \, dy,\ \ D = \{\,(x,y) \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0,\ x \geq 0\,\}.$

22. 以下の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iiint_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz,\ D=\{\,(x,y,z)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1\}.$

(2) $\displaystyle\iiint_D z\,dx\,dy\,dz,\ D=\{\,(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq 1,\ z\geq 0\,\}.$

23. 空間に直交座標をとり，$\mathbb{R}^3$ と同一視をする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 以下のベクトルで張られる平行六面体の体積を求めよ．

$$\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}.$$

(2) 4 点 $(2,0,3)$, $(3,-1,0)$, $(1,3,3)$, $(0,0,-1)$ を頂点とする四面体の体積を求めよ．

24. a, b, p, q を $0<a<b$, $0<p<q$ であるような定数とする．このとき，積分の変数変換の計算練習として次の領域 D の面積を求めよ．

(1) $D=\{(x,y)\mid ax^2\leq y\leq bx^2,\ py^2\leq x\leq qy^2\}$ （変数変換 $s=y/x^2$, $t=x/y^2$ を考えよ.）

(2) $D=\{(x,y)\mid ax\leq y\leq bx,\ p\leq xy\leq q\}$ （変数変換 $s=y/x$, $t=xy$ を考えよ.）

25. 極座標に変換することにより，以下の積分を計算せよ．ただし，R, d, z_0 は $z_0<R$ 又は $R+d<z_0$ であるような正の定数とする．

$$\iiint_{R^2\leq x^2+y^2+z^2\leq (R+d)^2}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}}$$

（注）この積分は，原点を中心とした質量密度一定の厚さ d の球殻による点 $(0,0,z_0)$ での重力ポテンシャルを計算していることになっている（電荷密度一定の球殻による静電ポテンシャルでもよい）．

26. 以下の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,\quad D=\{\,(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq R^2\,\}$ （ただし，R は正の定数）

(2) $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,\quad D=\{\,(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0\,\}$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

27. $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の連続関数とする．このとき, 任意の $n\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して $\displaystyle\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f(t)dt=f(x)$ が成り立つことを示せ.

28. $\displaystyle F(x)=\int_0^\infty e^{-y^2}\cos xy\,dy$ とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}F(x)=-\frac{x}{2}F(x)$ を示せ．但し，積分と微分の順序交換は可能であるとして良い．

(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}(e^{x^2/4}F(x))$ を計算せよ．

(3) $\displaystyle F(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2/4}$ を示せ.

29. 次の 2 つの積分を計算せよ．

$$\int_0^1\left(\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy,\qquad \int_0^1\left(\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx.$$

この 2 つの積分の値は同じにはならない．つまり，重積分 $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ は意味を持たない．問題 19 と状況が決定的に違うところがあるのだがそれはどこか？

30. $b > 0$ とする．三点 $(-1, 0)$, $(1, 0)$, (a, b) を頂点とする三角形の重心の位置を求めよ．ただし，三角形上の質量の分布は一様で，さらに厚さは無いものとする．

31. 以下の積分を指定された変数変換を用いて計算せよ．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$$\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\,\}.$$

(2) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le x,\ 0 \le y\}.$$

(3) 線形変換 $u = 2x + y$, $v = x + 2y$.

$$\iint_D (x+2y)^2(2x+y)^4\,dx\,dy, \qquad D = \{\,(x, y) \mid -1 \le 2x + y \le 1,\ -1 \le x + 2y \le 1\,\}.$$

32. 以下の積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}\,dx\,dy,\ \ D = \{\,(x, y) \mid x \ge 1,\ y \ge 1\,\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}\,dx\,dy,\ \ D = \{\,(x, y) \mid x \ge 1,\ y \ge 1,\ y \ge x\,\}$

33. 以下の積分の順序交換が正しいことを認め，その両辺を計算することにより，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ を示せ．

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx\right)dy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dy\right)dx$$

（注）上の積分の順序交換は実際成立する．しかし，実際に交換可能であることを確認するには詳しい考察が必要である．尚，$\displaystyle\iint_{x\ge0, y\ge0} e^{-xy}\sin x\,dx\,dy$ には意味が無い（与えられた領域上で積分可能ではない）．重積分としての意味があれば二通りの累次積分が一致するのは保証されるので，上の積分の順序交換は可能になるが，今の場合はこれを理由にできない．