

微分積分学 A レポート問題 (その 1)

問題に関するヒント, 注釈等は <http://www35.atwiki.jp/mathlec/> 以下のページを参照せよ.

1. $\alpha = \sin \frac{\pi}{18}$, $f(x) = 8x^3 - 6x + 1$, $g(x) = x + \frac{1}{6}f(x)$ とし, 数列 a_n ($n = 1, 2, \dots$) を $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_{n+1} = g(a_n)$ で定める. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(\alpha) = 0$ を示せ.

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ の解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (但し, $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$) とすると, $\alpha_1 < 0$, $\frac{1}{6} < \alpha_2 < \frac{1}{5}$, $\frac{3}{4} < \alpha_3$ であることを示せ.

(3) $\alpha_2 = \alpha$ を示せ.

(4) $0 \leq x \leq \frac{1}{5}$ のとき, $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{5}$ を示せ.

(5) $|a_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5}|a_n - \alpha|$ ($n = 1, 2, \dots$) を示せ.

(6) 数列 a_n の最初の何項かを実際に計算し, α を小数点以下第 5 位まで求めよ. ただし, 小数点以下第 5 位まで数値が確定することの理由は述べること.

2. 以下の問に答えよ.

(1) $\tan(4 \arctan \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4})$ を計算せよ.

(2) $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ を示せ.

3. $f(x) = \arctan x$ として, 以下の問に答えよ.

(1) 任意の自然数 n に対して,

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(\arctan x) \sin(n(\arctan x + \frac{\pi}{2}))$$

を示せ.

(2) Taylor の定理を用いて, $|x| \leq \frac{1}{5}$ において,

$$\left| f(x) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \right| < 10^{-5}$$

となることを示せ.

(3) $\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}$ (問題 2) と併せて, π を小数点以下第 3 位まで求めよ. ただし, 小数点以下第 3 位まで数値が確定する理由は述べること.

(4) Taylor の定理を用いて, $f(x)$ の $x = 0$ を中心とした Taylor 展開を求めよ (等式が成立する x の範囲も明示すること).