

微分積分学 A 演習問題 (その 2)

問題に関するヒント, 注釈等は <http://www35.atwiki.jp/mathlec/> 以下のページを参照せよ.

11. (5月24日) 以下の間に答えよ.

(1) Taylor の定理を用いて, $|x| \leq 1$ の範囲で,

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) \right|$$

の大きさがどの程度になるかを (有理数で) 評価せよ.

(2) (1) を利用して, $\sin 1$ を数値的に求め, その値が小数点以下第何位まで信用できるかを理由を付して述べよ.

12. (5月24日) 以下の間に答えよ.

(1) Taylor の定理を用いて, $|x| \leq \frac{1}{2}$ の範囲で,

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) \right|$$

の大きさがどの程度になるかを (有理数で) 評価せよ.

(2) (1) を利用して, $e^{\frac{1}{2}}$ を数値的に求め, その値が小数点以下何位まで信用できるかを理由を付して述べよ.

13. (5月24日) $\cos x$ の $x = 0$ を中心とした Taylor 展開を求めよ.

14. 以下のそれぞれの関数について, $x = 0$ を中心とした Taylor 展開を求めよ. ただし, e^x , $\sin x$, $\cos x$ の $x = 0$ を中心とした Taylor 展開は既知としてよい.

(1) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (2) $(x^2 + 1) \sin x$ (3) e^{x^2+1} (4) $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ (5) $\cos^2 x$

15. (5月24日) 以下の間に答えよ.

(1) e^x に対して, Taylor の定理を適用することで, 任意の自然数 n に対して, $e = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{e^c}{n!}$ となる c ($0 < c < 1$) が存在することを示せ.

(2) (1) を利用して, e が無理数であることを示せ. ただし, $2 < e < 3$ は既知とする.

16. (5月24日) $f(x) = e^{-1/x^2}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$ で $f(x)$ を定義する. n を 0 以上の整数として, 以下の間に答えよ.

(1) $x \neq 0$ において,

$$f^{(n)}(x) = \frac{g_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2} \quad (g_n(x) \text{ は } x \text{ の多項式})$$

とあらわせることを示せ.

(2) $f^{(n)}(0)$ を求めよ.