

微分積分学 A 演習問題 (その 1)

問題に関するヒント, 注釈等は <http://www35.atwiki.jp/mathlec/> 以下のページを参照せよ.

1. (4月19日) 以下の間に答えよ.

(1) 自然数 n に対して, $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$ を示せ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ を求めよ.

2. (4月19日) a, b をそれぞれの条件を満たす定数として, 以下の極限を求めよ. ただし, 問題1の結果は既知としてよい.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \quad (0 < a < 1) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \quad (1 < a) \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad (0 < a \leq b)$$

3. (4月19日) 以下の極限を求めよ. ただし, k, l は自然数, $a_0, a_1, \dots, a_k, b_0, b_1, \dots, b_l$ は定数で, $a_0 b_0 > 0$ とする.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \dots + b_{l-1} n + b_l}$$

4. (4月19日) 以下の数列 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) が発散することを示せ.

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

5. (5月10日) 次の等式を示せ.

$$2 \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$

6. (5月10日) $y = \arcsin(\sin x)$ のグラフを図示せよ.

7. (5月10日) 以下の間に答えよ.

(1) $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, $2 \arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ を示せ.

(2) 上の等式は $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ では成立しないことを示せ.

8. 以下の間に答えよ.

(1) $x > 0$ のとき, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ を示せ.

(2) $x < 0$ のとき, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ を求めよ.

9. (5月10日) 多項式 $(1+x+x^2)^{30}$ を x の中で展開したときの2次と3次の係数を求めよ.

10. 任意の自然数 N について成立する等式

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{N-1} t^{N-1} + \frac{(-t)^N}{1+t}$$

の両辺を $t=0$ から $t=x$ まで積分することで, $-1 < x \leq 1$ において,

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

が成立することを示せ.