10 関係、写像、線形写像

10-1 同値関係と商集合

(2009年度はこの単元は割愛する。理論系に進む諸君はぜひ自習してもらいたい。)

集合 X における関係 (relation) $\sim$ とは、任意の2元 $x, y \in X$ に対して、true(真) または false(偽) のいずれかが決まっているようなものを言う。

$$\sim : X \times X \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$$

という写像であると考えても良い。(写像の定義は10-2節を見よ。) true に対応するときには $x \sim y$ 、false に対応するときには $x \not\sim y$ と書く。

(例1)

$\mathbb{N} = \{\text{自然数の集合}\}$ に対して、 $x \sim y$ を $|x - y| \leq 1$ により定義するとする。すると $\sim$ は関係である。

つまり、 x, y が具体的に与えられれば $x \sim y$ かまたは $x \not\sim y$ のどちらかであるかが決まる。このようなものを関係と呼ぶのである。

(例2)

$\mathbb{Z} = \{\text{整数全体の集合}\}$ に対して、 $x \equiv y$ を「 $x - y$ が7の倍数」により定義すると、 $\equiv$ は関係である。

(注意) 一般的にはこのような場合、 $x \equiv y \pmod{7}$ と書くのが一般的である。今は「関係」という事柄に焦点を当てているので、それを簡略化して書いている。つまり、関係を表わすときには $\sim$ がよく用いられるがそれ以外の記号を使ってもかまわないことを示唆している。

(注意) 「7の倍数」というと正の数も負の数も0も含めるのが普通である。「偶数」と言った場合、負の数を含めるかどうかは歴史的経緯があり意見が分かれるようだが、数学的には負の数も含めるほうが自然である。

(例3)

$\mathbb{R} = \{\text{実数全体の集合}\}$ に対して、「以上」を表わす $x \geq y$ は関係である。

(注意) 「関係」というと何らかの意味で同等と考えられるもの、という印象が強いが、大小のような序列を表わすものも関係の一種である。直後に述べるように、商空間を定義するためには関係が同値関係でなければならないが、不等号のような序列を表わす関係には「順序関係」という概念が別途あり、これも数学上重要な考え方のひとつである。

(注意) 実数の全体の集合を表わす記号として $\mathbf{R}$ を使い続けてきたが、黒板に書くときにはむしろ $\mathbb{R}$ に近い書き方をとする。このフォントは「黒板ボード体」と呼ばれるもので、 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ などは良く用いられる。

(例 4)

$M_n(\mathbf{R}) = \{n \text{ 次正方形行列}\}$ とする。行列 $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ に対して、 $A \sim B$ を「ある正則行列 P が存在して、 $B = P^{-1}AP$ と表わされる」により定義するとこれは関係である。

(注意) 数学の場合、「実証可能性」を問わなくとも定義として成立するのが普通である。つまり、この例の場合、実際に二つの行列 A, B が与えられた場合、 $A \sim B$ であるかどうかを判定する方法が存在しているかどうかは問題にしていない。 P が存在すれば $A \sim B$ である、と定義しているのみである。

もっとも、この例の場合には「ジョルダン標準形」という考え方があり、ジョルダン標準形が一致すれば $A \sim B$ であるということが数学的に証明される。であるから、この場合はたまたま実証可能である。

(例 5)

$M_{n,m}(\mathbf{R}) = \{n \times m \text{ 行列}\}$ とする。行列 $A, B \in M_{n,m}(\mathbf{R})$ に対して、 $A \sim B$ を「ある正則行列 P, Q が存在して、 $B = QAP$ と表わされる」により定義するとこれは関係である。

(注意) この例の場合も(定義をする段階では)実証可能性は問題にしていない。もっとも、定理として「ある正則行列 P, Q が存在して、 $B = QAP$ と表わされる」ことは「 A, B の階数(rank) が等しい」ことと必要十分条件であることが知られているので、この場合には実証可能である。

関係 $\sim$ について、以下の用語を定義する。

定義(反射律、対称律、推移律)

(1) $\sim$ が「任意の $x \in X$ について $x \sim x$ 」を満たすとき、反射律(reflexive law) を満たすという。

(2) $\sim$ が「任意の $x, y \in X$ について $x \sim y$ ならば $y \sim x$ 」を満たすとき、対称律(symmetric law) を満たすという。

(3) $\sim$ が「任意の $x, y, z \in X$ について $(x \sim y \text{ かつ } y \sim z)$ ならば $x \sim z$ 」を満たすとき、推移律(transitive law) を満たすという。

(4) 上記(1)(2)(3)すべてを満たすとき、 $\sim$ は同値関係(equivalent relation) であるという。

(注意) 上記の例について：

(例 1) (1) OK, (2) OK, (3) NG

(例2) (1) OK, (2) OK, (3) OK、同値関係である。

(例3) (1) OK, (2) NG, (3) OK

(例4) (1) OK, (2) OK, (3) OK、同値関係である。

(例5) (1) OK, (2) OK, (3) OK、同値関係である。

証明は練習問題に譲る。

定義 (同値類) 関係 $\sim$ が同値関係のとき、任意の $x \in X$ に対して、

$$C(x) := \{y \in X \mid x \sim y\}$$

と定義し、これを x を含む同値類と呼ぶ。

(注意) 記号 $[x]$ も、同値類を表わす記号としてよく用いられる。一般的な傾向だが、 $C(x)$ は代数学で、 $[x]$ は幾何学でよく使われる。

(注意) $C(x)$ という同値類を考えたとき、 x をその同値類の代表元であるという。代表元は $C(x)$ に属している要素であればどれを選んでも良い。(代表していればよいので、リーダーシップが問われたりするようなことはないのである。)

命題

(1) $x \in C(x)$

(2) $x \in C(y)$ ならば $y \in C(x)$

(3) $x \in C(y)$ ならば $C(x) = C(y)$ 、 $x \notin C(y)$ ならば $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ である。

(証明)

(1),(2),(3) はそれぞれ反射律、対称律、推移律により直接示される。演習問題にまわそう。(3) がやや複雑なのでここで説明しておこう。

$x \in C(y)$ であると仮定する。したがって、 $y \sim x$ である。今、 $C(x)$ の任意の元 z を取ったとき、 $x \sim z$ であるから、推移律により $y \sim z$ であり、 $z \in C(y)$ である。このことより $C(x) \subset C(y)$ が成り立つ。(2) を用いて $y \in C(x)$ であるから、同じ議論を x, y の立場を逆にして行くと $C(y) \subset C(x)$ である。以上より $C(x) = C(y)$ が示された。

$x \notin C(y)$ の場合には、背理法を用いる。 $z \in C(x) \cap C(y)$ であると仮定する。このとき、 $x \sim z$ かつ $y \sim z$ であるから、推移律より $x \sim y$ である。これは $x \notin C(y)$ に反する。以上により証明された。(証明終わり)

この命題により、集合 X はいくつかの互いに交わらないような同値類の和集合として書かれることがわかる。つまり、いくつかの元 $x_1, x_2, \dots \in X$ が存在して、

$$X = C(x_1) \cup C(x_2) \cup \dots$$

となる。こうしたことを踏まえて、 X の $\sim$ による商集合 (quotient set) $X/\sim$ を

$$X/\sim := \{C(x_1), C(x_2), \dots\}$$

により定義する。

(注意) 互いに異なる同値類の個数は有限個の場合もあるし、可算無限個の場合もあるが、非可算無限個の場合もありうる。非可算無限個の場合、異なる同値類を $C(x_1), C(x_2), \dots$ のように番号付けして並べることは不可能だが、商集合の定義は同じである。

(注意) 商集合の元 (要素) は同値類でありこれ自体も集合である。したがって、商集合は「集合を元とする集合」である。

(注意) 共通部分のない和集合の場合、 $\cup$ の代わりに $\sqcup$ が用いられることもある。この記号を用いれば、

$$X = C(x_1) \sqcup C(x_2) \sqcup \dots$$

と書かれることがわかるだろう。

(商集合の例)

(例2) この場合、 $\mathbb{Z}/\equiv = \{C(0), C(1), C(2), C(3), C(4), C(5), C(6)\}$ である。つまり、整数全体を7で割ったあまりによって分類したと考えられる。

(例4) この場合、 $A \sim B$ であるかどうかは、ジョルダン標準形を比較すればわかる。雑な言い方をすれば $M_n(\mathbb{R})/\sim$ は「ジョルダン標準形全体の集合」とおおむね対応がつく。(ジョルダン標準形の章を参照のこと。厳密には、「ジョルダン細胞の並べ方は問わないジョルダン標準形全体の集合」と言ったほうが正しい。)

(例5) この場合、 $A \sim B$ であるかどうかは、基本変形によって変形して標準形にすれば判定できる。すなわち、 $M_{n,m}(\mathbb{R})/\sim$ の元は階数 (rank) を通じて0以上の整数と対応がつくことがわかる。

10-2 写像

定義 (写像)

X, Y を集合とする。 $f: X \rightarrow Y$ が写像 (map) であるとは、 X の任意の元 x に対して、 Y の元 $f(x)$ を対応させる規則のことをいう。 X を定義域、 Y を値域という。

写像 $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ の場合には写像とは言わずに関数 (function) と呼ぶ場合が多い。また、 $X = Y$ の場合には多くは変換 (transformation) と呼ばれる。

(注意) X の元 x を Y の元 $f(x)$ へと写す (動詞として map という英語を用いる) という言い方をする。「移す」という漢字も良く用いられる。

定義 (逆像)

写像 $f: X \rightarrow Y$ と $y_0 \in Y$ に対して、

$$f^{-1}(y_0) := \{x \in X \mid f(x) = y_0\}$$

を (f による) y_0 の逆像 (inverse image) という。

(注意) 逆像は、 X の元ではなく、 X の部分集合である。たとえ $f^{-1}(y_0)$ が1つの要素からなるとしても、逆像は X の部分集合として考える。後で述べるが、任意の y_0 に対して $f^{-1}(y_0)$ が1つの要素からなる場合には、これを写像を考えることが可能になるので、逆写像と呼んで $f^{-1}: Y \rightarrow X$ という書き方をすることもできるが、それは非常に特殊な場合である。

(例)

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ の場合。(高校で習う意味での関数の場合。) $y_0 \in \mathbf{R}$ に対して、 $f^{-1}(y_0)$ とは、 $y = f(x)$ のグラフと $y = y_0$ のグラフの交わりの x 座標の集合である。

定義 (全射・単射・全単射)

(1) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が次の条件を満たすとき、全射 (上への写像, onto, surjection, epimorphism) であるという。

(全射条件) 任意の $y \in Y$ に対し、ある $x \in X$ が存在して、 $y = f(x)$ 。

($\forall y \in Y, \exists x \in X, \text{ s.t. } y = f(x)$.)

(2) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が次の条件を満たすとき、単射 (1対1写像, 1-to-1, injection, monomorphism) であるという。

(単射条件) 任意の $x_1, x_2 \in X$ について、 $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ 。

($\forall x_1, \forall x_2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)

(3) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が全射かつ単射のとき、全単射 (bijection) であるという。

(注意)

(1) s.t. とは「such that」の略記号である。「～であるような」という意味である。

(2) 全射条件において、 $\exists x \in X, \forall y \in Y$ のように交換してしまうと意味が変わってしまうことに注意しよう。次の例で実感してほしい。

$\forall y \in Y, \exists x \in X$: どの男の子にもつきあっている彼女がいる。

$\exists x \in X, \forall y \in Y$: ある女の子はすべての男の子とつきあっている。

(3) 単射条件において、「任意の $x_1, x_2 \in X$ について、 $f(x_1) = f(x_2)$ ならば…」と言っているが、任意だと言っているのに $f(x_1) = f(x_2)$ という条件を満たせというのはおかしいのではないか、と思う人がいるかもしれない。しかし、論理的にこの記述は正しい。「A ならば B」というのは、A が正しくないときには命題は真である。(A が正しく B もたしい時にも命題は真である。) したがって、 $f(x_1) \neq f(x_2)$ の場合には、仮定が満たされない場合であって、命題としてはいつでも真になる。要は $f(x_1) = f(x_2)$ の場合には必ず $x_1 = x_2$ になることが実質的に要求されている条件である。

定義 (恒等写像、包含写像)

(1) 任意の集合 X について、 $f(x) = x$ により定義されている写像 $f: X \rightarrow X$ を恒等写像 (identity map) という。恒等写像は多くの場合 $\text{id}: X \rightarrow X$ と書かれる。 id_X のように、対象となる集合を明記する場合もある。恒等写像は全単射である。

(2) 集合 X とその部分集合 A について、 $f: A \rightarrow X$ であって、 $f(a) = a$ で定義される写像を包含写像 (inclusion map) という。多くの場合、 $i: A \rightarrow X$ または $\iota: A \rightarrow X$ と書かれる。包含写像は必ず単射である。(ι はギリシャ文字「イオタ」の小文字である。)

定義 (左逆写像・右逆写像・逆写像)

(1) 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、ある写像 $g: Y \rightarrow X$ が $g \circ f = \text{id}_X$ を満たすとき、 g を f の左逆写像 (left inverse map) という。

(2) 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、ある写像 $g: Y \rightarrow X$ が $f \circ g = \text{id}_Y$ を満たすとき、 g を f の右逆写像 (right inverse map) という。

(3) 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、ある写像 $g: Y \rightarrow X$ が $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ を満たすとき、 g を f の逆写像 (inverse map) という。

任意の写像 f について、逆写像が存在するわけではない。次の命題でその意味がわかるであろう。

命題

- (1) $f : X \rightarrow Y$ が単射 $\Leftrightarrow$ 左逆写像 g が存在する。
- (2) $f : X \rightarrow Y$ が全射 $\Leftrightarrow$ 右逆写像 g が存在する。
- (3) $f : X \rightarrow Y$ が全単射 $\Leftrightarrow$ 逆写像 g が存在する。

この証明は練習問題とする。

(注意) 一般に f^{-1} は逆像に用いる記号であるが、 f が全単射の時に限り f^{-1} は逆写像の意味で用いられる。

ここで関数のグラフにおける単射・全射の意味) を述べておこう。関数 $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ が単射であるとは、任意の $k \in \mathbf{R}$ について $y = k$ と $y = f(x)$ の交点の個数は1個以下であることをいう。一方で、全射であるとは、任意の $k \in \mathbf{R}$ について $y = k$ と $y = f(x)$ とが必ず交わることをいう。

(例)

- (1) $f(x) = x^3 - x$: 全射だが単射でない。
- (2) $f(x) = x^2$: 単射でも全射でもない。
- (3) $f(x) = e^x$: 単射だが全射でない。
- (4) 定義域を $\{x \mid x > 0\}$ とすれば $f(x) = \log(x)$ は全単射である。

10-3 線形空間

定義 (線形空間)

集合 V が次の 2 条件 [I][II] を満たすとき、 V を実線形空間 (実ベクトル空間, real linear space, real vector space)、または単に線形空間 (linear space, vector space) という。

条件 [I] V には和が定義され、加群条件 (I-1)~(I-4) を満たす。

(I-0) V の 2 元 x, y に対して、和 $x + y \in V$ が定義される。

(I-1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (結合法則, associative law)

(I-2) $x + y = y + x$ (交換法則, commutative law)

(I-3) $\exists \mathbf{o} \in V, \text{ s.t. } \forall x \in V, \mathbf{o} + x = x$ (単位元 (unit) の存在)

(I-4) $\forall x \in V, \exists y \in V \text{ s.t. } x + y = \mathbf{o}$ (逆元 (inverse element) の存在)

条件 [II] V には実数による定数倍が定義され、以下の条件 (II-1)~(II-4) を満たす。

(II-0) 任意の $x \in V$ と任意の実数 $c \in \mathbf{R}$ に対して、定数倍 $cx \in V$ が定義される。

(II-1) $(a + b)x = ax + bx$ (分配法則 1 (distributive law))

(II-2) $a(x + y) = ax + ay$ (分配法則 2)

(II-3) $(ab)x = a(bx)$

(II-4) $1x = x$

(注意) 線形空間の元 x は一般に (混同の恐れがないときには) ベクトル (vector) と呼ばれる。それと対照する言い方で、定数倍の定数のことをスカラー (scalar) と呼ぶ。

定義 (複素線形空間)

上記 [I][II] において、(II-0) の「実数」を「複素数」に置き換えたものを複素線形空間 (複素ベクトル空間, complex linear space, complex vector space) と呼ぶ。

(例1)

$V = \{\mathbf{o}\}$ は線形空間である。

(例2)

実座標空間 $\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$ は線形空間である。

(例3)

複素数空間 $\mathbf{C} := \{x + yi \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ は実線形空間である。(もちろん複素線形空間でもある。)

(例4)

m 行 n 列の実行列全体の集合 $M_{m,n}(\mathbf{R})$ は行列の和と行列の定数倍に関して線形空間である。

(例5)

任意の斉次 n 元 1 次連立方程式 $Ax = \mathbf{o}$ の解空間

$$V = \{x \mid Ax = \mathbf{o}\}$$

は線形空間である。ただしここで $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in$

$\mathbf{R}^m, A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ である。

(証明) V の元は実座標空間 $\mathbf{R}^n$ の元であるから、和や定数倍が定義されること、およびその性質は明らかに成り立つ。したがって、和や定数倍が V の中で閉じていること (I-0) (II-0) を示す。

$x, x' \in V$ とすると、 $Ax = \mathbf{o}, Ax' = \mathbf{o}$ が成り立つ。この2式より

$$A(x + x') = Ax + Ax' = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$$

$$A(cx) = cAx = c\mathbf{o} = \mathbf{o} \quad (c \text{ は任意の実数。})$$

が成り立ち、 $x + x' \in V, cx \in V$ が示された。以上より V は線形空間である。(証明終わり)

(例6)

$\mathbf{R}[x] := \{ \text{変数 } x \text{ を含む実数係数有限次数多項式} \}$ は多項式の和・定数倍について線形空間である。

(例7)

$\mathbf{R}[[x]] := \{ \text{変数 } x \text{ による実数係数無限級数} \}$ は無限級数の和・定数倍について線形空間である。ちなみに、

$$\mathbf{R}[[x]]_r := \{ \text{変数 } x \text{ による実数係数無限級数で収束半径が } r \text{ 以上のもの} \}$$

とすると、これも線形空間になる。(和・定数倍について閉じていることを確認してみよう。)

(例 8)

$S := \{ \text{実数無限数列} \}$ は線形空間である。ただし、数列の和・定数倍は

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad c\{a_n\} = \{ca_n\}$$

で定義するものとする。

$$\ell^2(\mathbf{R}) := \{ \{a_n\} \mid \text{実数無限数列で有限個の項を除いて } 0 \text{ である} \}$$

も線形空間である。さらに、

$$\ell^2(\mathbf{R}) := \{ \{a_n\} \mid \text{実数無限数列で } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \}$$

も線形空間になる。これはヒルベルト空間と呼ばれる集合の最も簡単な例である。この証明のためには、数列に関するシュヴァルツの不等式を用いる必要がある。

(例 9)

$A \subset \mathbf{R}$ を実数内の区間であるとする。(無限区間でも構わない。) A を定義域とする関数 $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ で連続なもの全体の

$$C^0(A) := \{ f: A \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ は連続関数} \}$$

は線形空間である。さらに、

$$L^1(A) := \{ f: A \rightarrow \mathbf{R} \mid \int_A |f(x)| dx < \infty \}$$
$$L^2(A) := \{ f: A \rightarrow \mathbf{R} \mid \int_A \{f(x)\}^2 dx < \infty \}$$

も線形空間である。(この集合に含まれる関数は条件になっている積分が計算できることを仮定するものとする。) さらに、

$$L^\infty(A) := \{ f: A \rightarrow \mathbf{R} \mid \text{ある実数 } M \text{ が存在して } |f(x)| < M \}$$

も線形空間になる。ここに現れた $C^0(A)$, $L^1(A)$, $L^2(A)$, $L^\infty(A)$ は数学で一般的に用いられている記号である。

10-4 線形写像、同型写像

定義 (線形写像)

V, W を線形空間であるとする。写像 $f: V \rightarrow W$ が

$$\begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y) \\ f(cx) = cf(x) \end{cases}$$

を満たすとき、 f を (V から W への) 線形写像 (linear map, vector map) という。

(注意) $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ が $m \times n$ 行列で表わされるときにこれを線形写像と呼んだ。この定義はその発展形である。 $\mathbf{R}^n$ では座標が明確になっており、その座標に関して写像の行列による表示が可能であった。一般の線形空間 V, W の場合には、座標が定められていないので、 f をそのまま行列で表わすことはできない。一方で、線形空間の基底という考え方をうければ、線形空間の元は座標で書き表され、(その基底に関する) f の行列表示が可能になる。次章を参照のこと。

定義 (同型写像)

線形写像 $f: V \rightarrow W$ が全単射のとき、これを同型写像とよび、 V と W は (線形空間として) 同型であるという。

(注意) $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ が同型写像であるとは、 $n = m$ であって、かつ行列が正則写像であることが必要十分条件である。証明してみよ。

10章練習問題

- (10-1) (基本) $\mathbb{N} = \{ \text{自然数の集合} \}$ に対して、 $x \sim y$ を $|x - y| \leq 1$ により定義する。このとき $\sim$ が反射律、対称率、推移律を満たすかどうか調べよ。
- (10-2) (基本) $\mathbb{Z} = \{ \text{整数全体の集合} \}$ に対して、 $x \equiv y$ を「 $x - y$ が 7 の倍数」により定義する。このとき $\equiv$ が反射律、対称率、推移律を満たすかどうか調べよ。
- (10-3) (基本) $\mathbb{R} = \{ \text{実数全体の集合} \}$ に対して、「以上」を表わす $x \geq y$ について反射律、対称率、推移律を満たすかどうか調べよ。
- (10-4) (基本) $M_n(\mathbb{R}) = \{ n \text{ 次正方行列} \}$ とする。行列 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して、 $A \sim B$ を「ある正則行列 P が存在して、 $B = P^{-1}AP$ と表わされる」により定義する。このとき $\sim$ が反射律、対称率、推移律を満たすかどうか調べよ。
- (10-5) (基本) $M_{n,m}(\mathbb{R}) = \{ n \times m \text{ 行列} \}$ とする。行列 $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ に対して、 $A \sim B$ を「ある正則行列 P, Q が存在して、 $B = QAP$ と表わされる」により定義する。このとき $\sim$ が反射律、対称率、推移律を満たすかどうか調べよ。
- (10-6) (基本) 以下を示せ。
- (1) $x \in C(x)$
 - (2) $x \in C(y)$ ならば $y \in C(x)$
 - (3) $x \in C(y)$ ならば $C(x) = C(y)$ 、 $x \notin C(y)$ ならば $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ である。
- (10-7) (標準) 10-1 節の例 4、例 5 について、商集合を明示的に記述してみよ。
- (10-8) (標準) 以下を示せ。
- (1) $f: X \rightarrow Y$ が単射 $\Leftrightarrow$ 左逆写像 g が存在する。
 - (2) $f: X \rightarrow Y$ が全射 $\Leftrightarrow$ 右逆写像 g が存在する。
 - (3) $f: X \rightarrow Y$ が全単射 $\Leftrightarrow$ 逆写像 g が存在する。
- (10-9) (基本) 以下を示せ。(正しく証明してみよ。)
- (1) $f(x) = x^3 - x$: 全射だが単射でない。
 - (2) $f(x) = x^2$: 単射でも全射でもない。
 - (3) $f(x) = e^x$: 単射だが全射でない。
 - (4) 定義域を $\{x \mid x > 0\}$ とすれば $f(x) = \log(x)$ は全単射である。

(10-10) (標準)

(1) $f(x) = x^3 - x$ は全射であるので、右逆写像 $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ が存在する。その概形を描け。

(2) $f(x) = e^x$ は単射であるので、左逆写像 $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ が存在する。その概形を描け。

(10-11) (標準) $\mathbf{R}[x] := \{ \text{変数 } x \text{ を含む実数係数有限次数多項式} \}$ は多項式の和・定数倍について線形空間であることを示せ。

(10-12) (標準) $\mathbf{R}[[x]]_r := \{ \text{変数 } x \text{ による実数係数無限級数で収束半径が } r \text{ 以上のもの} \}$ は無限級数の和・定数倍について線形空間であることを示せ。

(10-13) (やや難) $\ell^2(\mathbf{R}) := \{ \{a_n\} \mid \text{実数無限数列で } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \}$ は数列の和・定数倍について閉じているを示せ。

(10-14) (やや難) 10-3 節(例9)で紹介した $C^0(A), L^1(A), L^2(A), L^\infty(A)$ は関数の和・定数倍について閉じていることを示せ。

(10-15) (標準) V, W を線形空間 $f: V \rightarrow W$ が同型写像であるとき、その逆写像 f^{-1} も線形写像であることを示せ。

(10-16) (やや難) $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ が同型写像であるとは、 $n = m$ であって、かつ行列が正則写像であることが必要十分条件である。