

9. 行列式

9-1. 行列の定義

(定義)

$A: n$ 次正方行列 $A = (a_{ij})_{(i,j)}$ に対して、その行列式 $\det A$ を

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

により定義する。

(例題)

$n = 3$ のときには

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

であることから、項の数は6つあり、

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

となる。

(注意) 2行2列、3行3列の場合には「タスキかけ」の印象が強いが、行列式は置換によって決められているものであり、4行4列以上の場合にはタスキかけの公式はない。4行4列では24項、5行5列では120項からなる式になる。

9-2. 対角行列の行列式

(命題)

A が対角行列の時は

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

である。

(理由) 行列式の定義式の中で、 $\sigma \in S_n$ が恒等写像 1 の場合には $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ という項がでてくるが、それ以外の項は 0 になってしまうことからこの公式が成り立つ。

また、このことの系として

$$\det E = 1, \quad \det O = 0$$

が得られる。

(命題) 0 の列をもつ行列の行列式は 0

A のある行 (または列) がすべて 0 であるならば、 $|A| = 0$ である。

(証明)

第 i 行がすべて 0 であると仮定する。すると

$$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0$$

である。この式を、行列式の定義の各項に代入することを考える。一つ一つの項は

$$\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

であるが、 $a_{i\sigma(i)} = 0$ であることから、各項は 0 になってしまう。その和をとっても 0 である。こうして行列式が 0 であることが示された。(証明終わり)

9-3. 転置行列の行列式

(命題)

$$|A| = |{}^t A|$$

(証明)

A の行列式は定義により

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

である。ここで、 $\tau = \sigma^{-1}$ とおく。 $\sigma(i) = j \Leftrightarrow \tau(j) = i$ に注意すると、 $a_{i\sigma(i)} = a_{\tau(j)j}$ であって、 $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n}$ であることがわかる。このことから、

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n} \\ &= |{}^t A| \end{aligned}$$

(証明終わり)

(注意) ここで、「 $\sigma \in S_n$ に関する総和」と「 $\tau \in S_n$ に関する総和」が同じ和であることを確認しておこう。練習問題を参照のこと。

(注意) この命題により、行列式は

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

と書いても良いことがわかる。以下、適宜この式も用いる。

9-4. 行列式の多重線形性 (multi-linearity)

(命題)

A を n 個の (n 次) 列ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ を横に並べて $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ と書くとき、その行列式を $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ と書くことにする。このとき次が成り立つ。

$$1) \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n)$$

$$2) \det(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = c \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

この性質を多重線形性という。

$$(\text{注意}) \quad \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \text{である。}$$

(証明)

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots (a_{\sigma(i)i} + a'_{\sigma(i)i}) \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a'_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n).$$

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots (ca_{\sigma(i)i}) \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= c \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= c \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)$$

(証明終わり)

9-5. 交代性 (alternating property)

(命題)

$$\det(\mathbf{a}_{\tau(1)}, \mathbf{a}_{\tau(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\tau(n)}) = \operatorname{sgn}(\tau) \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (\tau \in S_n)$$

(証明)

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{a}_{\tau(1)}, \mathbf{a}_{\tau(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\tau(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1) \tau(1)} \cdots a_{\sigma(i) \tau(i)} \cdots a_{\sigma(n) \tau(n)} \end{aligned}$$

ここで、 $\rho = \sigma\tau^{-1}$ とおくことにする。今、 τ は1つの固定された置換であることに注意すると、 σ を $\sigma \in S_n$ の範囲ですべて総和を取ることと、 $\rho = \sigma\tau^{-1}$ を $\rho \in S_n$ の範囲ですべて総和を取ることとは、同じことであることがわかる。つまり、 $\sum_{\sigma \in S_n} = \sum_{\rho \in S_n}$ である。(この部分は重要であるので練習問題で改めて考えること。) さて、 $\tau(i) = j$ とおくならば、 $i = \tau^{-1}(j)$ であるので、

$$a_{\sigma(i) \tau(i)} = a_{\sigma(i) j} = a_{\sigma(\tau^{-1}(j)) j} = a_{\rho(j) j}$$

である。このことから、

$$a_{\sigma(1) \tau(1)} \cdots a_{\sigma(i) \tau(i)} \cdots a_{\sigma(n) \tau(n)} = a_{\rho(1) 1} \cdots a_{\rho(i) i} \cdots a_{\rho(n) n}$$

であることがわかる。この式を上式に代入すると、

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{a}_{\tau(1)}, \mathbf{a}_{\tau(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\tau(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\rho(1) 1} \cdots a_{\rho(i) i} \cdots a_{\rho(n) n} \\ &= \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau^{-1}) a_{\rho(1) 1} \cdots a_{\rho(i) i} \cdots a_{\rho(n) n} \\ &= \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{\rho(1) 1} \cdots a_{\rho(i) i} \cdots a_{\rho(n) n} \\ &= \operatorname{sgn}(\tau) \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

したがって命題は証明された。(証明終わり)

(命題) 同じ列を持つ行列の行列式

$$a_i = a_j (i < j) \Rightarrow \det(a_1, \dots, a_n) = 0$$

(証明)

$\sigma = (i\ j)$ とすると、 $\operatorname{sgn} \sigma = -1$ であることから

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

である。一方で、 $a_i = a_j$ であるから、この両辺は 0 と等しくなければならない。
(証明終わり)

9-6. 積の行列式

(命題)

$$(1) \quad |AB| = |A||B|$$

$$(2) \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

(証明)

$$A = (a_{ij})_{(i,j)}, B = (b_{jk})_{(j,k)} \text{ とする。このとき、} AB = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right)_{(i,k)}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} |AB| &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\sum_{j_1} a_{1j_1} b_{j_1\sigma(1)} \right) \left(\sum_{j_2} a_{2j_2} b_{j_2\sigma(2)} \right) \cdots \left(\sum_{j_n} a_{nj_n} b_{j_n\sigma(n)} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} b_{j_1\sigma(1)} b_{j_2\sigma(2)} \cdots b_{j_n\sigma(n)} \right) \end{aligned}$$

である。さて、 $\sum_{\sigma \in S_n} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_n}$ のうち、 $j_1 = j_2$ の項だけを取り出して見てみよう。ここで、任意の置換 τ をひとつ固定して考える。隣接互換 $\sigma_1 = (12)$ について、 $\sigma = \tau$ の項と $\sigma = \tau\sigma_1$ の項とを比較してみる。

$$b_{j_1\sigma(1)} b_{j_2\sigma(2)} \cdots b_{j_n\sigma(n)} = \begin{cases} b_{j_1\tau(1)} b_{j_2\tau(2)} \cdots b_{j_n\tau(n)} & \sigma = \tau \text{ の場合} \\ b_{j_1\tau(2)} b_{j_2\tau(1)} \cdots b_{j_n\tau(n)} & \sigma = \tau\sigma_1 \text{ の場合} \end{cases}$$

である。ところが $j_1 = j_2$ より $b_{j_1\tau(1)} b_{j_2\tau(2)} = b_{j_1\tau(2)} b_{j_2\tau(1)}$ であり、符号が反対であることから、 $\sigma = \tau$ の項と $\sigma = \tau\sigma_1$ の項がちょうど打ち消しあうことがわかる。

以上のことを纏めて言うと、 $\sum_{\sigma \in S_n} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_n}$ は $j_1, j_2, \dots, j_n$ が互いに異なる場合の和をとれば十分であるといえる。そこであらためて $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$

とおくことにする。さらに $\rho = \sigma\tau^{-1}$ において、これを $|AB|$ の式に代入すると、

$$\begin{aligned} |AB| &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in S_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} b_{j_1\sigma(1)} b_{j_2\sigma(2)} \cdots b_{j_n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\rho \in S_n} \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\rho) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} b_{\tau(1)\rho\tau(1)} b_{\tau(2)\rho\tau(2)} \cdots b_{\tau(n)\rho\tau(n)} \\ &= \left(\sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} \right) \left(\sum_{\rho \in S_n} \text{sgn}(\rho) b_{1\rho(1)} b_{2\rho(2)} \cdots b_{n\rho(n)} \right) \\ &= |A||B| \end{aligned}$$

$AA^{-1} = E$ に (1) の公式を当てはめれば直ちに (2) の式を得る。
(証明終わり)

9-7. 行列式の特徴づけ

行列式は、多重線形性と交代性を持つことをすでに見てきた。このことの逆問題を考えよう。つまり、 n 個の n 次列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ に対して実数を対応させるような関数 $F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ が、

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) &= F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) \\ F(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) &= cF(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \\ F(\mathbf{a}_{\tau(1)}, \mathbf{a}_{\tau(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\tau(n)}) &= \text{sgn}(\tau)F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (\tau \in S_n) \end{aligned}$$

を満たすとしたときの $F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ の値について考えよう。すでに $n = 3$ の場合に章末練習問題 (3-3) で紹介済みの問題であるが、これは次のように解決可能である。

(命題)

上の 3 条件を満たす関数 F があるとする。基本単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ に対して、 $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = c$ (定数) であるとき、

$$F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = c \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

である。

(命題の証明)

$\mathbf{a}_j = \sum_i a_{ij} \mathbf{e}_i$ により数 a_{ij} を定めると、 F の多重線形性より

$$F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) \quad (\star)$$

である。いま、 $i_1, i_2, \dots, i_n$ の中に同一のものがあるとすると、交代性により $F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) = 0$ である。(3-3)(2) を参照せよ。) 従って、 $i_1, i_2, \dots, i_n$ が相異なる場合、つまり $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ が置換の場合についてのみ考えればよい。つまり、 $\tau \in S_n$ であり、 $\tau(1) = i_1, \tau(2) = i_2, \dots$ となる場合である。ここで、交代性より、

$$F(\mathbf{e}_{\tau(1)}, \mathbf{e}_{\tau(2)}, \dots, \mathbf{e}_{\tau(n)}) = \text{sgn}(\tau)F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = c \cdot \text{sgn}(\tau)$$

この式を $(\star)$ に代入して、

$$F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \sum_{\tau \in S_n} a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \dots a_{\tau(n)n} \cdot c \cdot \text{sgn}(\tau)$$

である。この右辺は $c \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ と等しい。 (証明終わり)

この命題を用いると、積の行列式に関する公式が容易に証明される。行列 $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ をひとつ任意に固定する。この X を用いて、

$$F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(X\mathbf{a}_1, X\mathbf{a}_2, \dots, X\mathbf{a}_n) = |XA|$$

と定義する。右辺が多重線形性と交代性を満たすことは、以下の計算で確かめられる。

$$\begin{aligned} & F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \det(A\mathbf{a}_1, \dots, A\mathbf{a}_i + A\mathbf{a}'_i, \dots, A\mathbf{a}_n) \\ &= \det(A\mathbf{a}_1, \dots, A\mathbf{a}_i, \dots, A\mathbf{a}_n) + \det(A\mathbf{a}_1, \dots, A\mathbf{a}'_i, \dots, A\mathbf{a}_n) \\ &= F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) \\ & F(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \det(A\mathbf{a}_1, \dots, cA\mathbf{a}_i, \dots, A\mathbf{a}_n) \\ &= c \det(A\mathbf{a}_1, \dots, A\mathbf{a}_i, \dots, A\mathbf{a}_n) \\ &= cF(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) \\ & F(\mathbf{a}_{\tau(1)}, \mathbf{a}_{\tau(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\tau(n)}) \\ &= \det(A\mathbf{a}_{\tau(1)}, A\mathbf{a}_{\tau(2)}, \dots, A\mathbf{a}_{\tau(n)}) \\ &= \operatorname{sgn}(\tau) \det(A\mathbf{a}_1, \dots, A\mathbf{a}_n) \\ &= \operatorname{sgn}(\tau) F(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (\tau \in S_n) \end{aligned}$$

また、

$$F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \det(X\mathbf{e}_1, X\mathbf{e}_2, \dots, X\mathbf{e}_n) = \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = |X|$$

である。このことから、

$$|XA| = \det(X\mathbf{a}_1, X\mathbf{a}_2, \dots, X\mathbf{a}_n) = |X| \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = |X| \cdot |A|$$

と計算される。

9-8. 小行列式、余因子

A を n 次正方行列とする。行列 A の第 i 行、第 j 列、を除いてできる $(n-1)$ 次正方行列の行列式を (i, j) 小行列式という。

$$(i, j) \text{ 小行列式} = \Delta_{ij} = \det \begin{pmatrix} \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots \end{pmatrix}$$

便宜上 (i, j) 小行列式を Δ_{ij} と書くこともある。

n 次正方行列 A の (i, j) 余因子 (cofactor) とは、 (i, j) 小行列式に $(-1)^{i+j}$ 倍したものである。

$$(i, j) \text{ 余因子} = \tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots \end{pmatrix}$$

便宜上 (i, j) 余因子を $\tilde{a}_{ij}$ と書くこともある。

$$\text{(例)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ とすると、} \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6 \text{ である。}$$

9-9. 行列の展開公式

(定理) 任意の j ($j = 1, 2, \dots, n$) について、

$$|A| = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \dots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}$$

この公式を行列式の第 j 列による展開公式という。

(定理の実行例)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ とすると、}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, & \tilde{a}_{11} &= 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 = -3 \\ a_{21} &= 4, & \tilde{a}_{21} &= -(2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) = 6 \\ a_{31} &= 7, & \tilde{a}_{31} &= 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = -3 \end{aligned}$$

であるから、

$$|A| = 1 \times (-3) + 4 \times 6 + 7 \times (-3) = 0$$

を得る。

(証明) $j = 1$ の場合にまず示す。第 1 列は

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{n1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので、行列式の多重線形性より、

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + a_{n1} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

いずれの項も第 1 列の基本変形を用いて、 $(i, 2)$ 成分から (i, n) 成分までを 0 にすることができる。

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + a_{n1} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

どの項についても $1, 0, \dots, 0$ という行が一番上になるように行の交換を行う。

$$\begin{aligned}
 |A| = & a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\
 & + (-1)^{n-1} a_{n1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

それぞれの項は $(i, 1)$ 小行列式である。符号まで加味して式を整理すると、

$$|A| = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{21}\tilde{a}_{21} + \cdots + a_{n1}\tilde{a}_{n1}$$

したがって、第 1 列に関する展開公式が証明された。

ほかの列についても、同じように展開公式を証明することができる。この公式は、都合よく計算をするためのものである。大きな行列式を求めるときには、0 の多い列に着目して、その列に関する展開公式を用いると良い。

(例)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

この行列は、第 2 列に 0 が多いので、第 2 列に関する展開公式を用いるのがうまい。 $a_{32} = 1, \tilde{a}_{32} = 1, a_{42} = 1, \tilde{a}_{42} = 87$ なので求める行列式は 88 である。

9-10. 余因子行列、逆行列の公式

(定理) j, ℓ が $1, 2, \dots, n$ のいずれかであるとき、

$$a_{1j}\tilde{a}_{1\ell} + a_{2j}\tilde{a}_{2\ell} + \dots + a_{nj}\tilde{a}_{n\ell} = \delta_{j\ell}|A|$$

である。ただし、 $\delta_{j\ell}$ はクロネッカーのデルタである。 $(j, \ell$ が等しいときに 1, 等しくないときは 0。)

(証明) もし $j = \ell$ であるならば、これは行列式の展開公式と同じ式であり、すでに証明済みである。

$j \neq \ell$ の場合に与式の左辺が 0 になることを証明しよう。行列 A を n 個の列ベクトルを並べたものとみなして、 $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n)$ と書くことにする。そこで、 A の第 ℓ 列を第 j 列の内容で置き換えたような行列を A' とする。(第 j 列はそのまま、第 ℓ 列だけを変更する。) つまり、

$$A' = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_j & \dots & \mathbf{a}_j & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

とする。

この行列の行列式は $|A'| = 0$ である。なぜなら、同じ内容の列を持つような行列の行列式は 0 であるから。一方で、 A' を第 ℓ 列で展開すると、 ℓ 行以外は A と同じであることに注意すると、 (i, ℓ) 成分が a_{ij} であることから、

$$a_{1j}\tilde{a}_{1\ell} + a_{2j}\tilde{a}_{2\ell} + \dots + a_{nj}\tilde{a}_{n\ell} = |A'| = 0$$

であることがわかり、定理は証明された。(証明終わり)

(定義) 余因子行列 (adjugate matrix)

$A = (a_{ij})_{(i,j)}$ に対して、

$$\tilde{A} := (\tilde{a}_{ji})_{(i,j)}$$

を A の余因子行列という。

(注意) 余因子行列と余因子とは (i, j) の配列が異なることに注意。 $\tilde{A}$ の (i, j) 成分は $\tilde{a}_{ji}$ である。 $\tilde{a}_{ij}$ ではない。

(定理の系)

A が正則行列であるならば、

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}$$

が成り立つ。

(証明) 上の定理と余因子行列の定義をあわせて考えれば、自然に証明できる。 $\tilde{A}A$ の (ℓ, j) 成分は

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (\tilde{A} \text{ の } (\ell, i) \text{ 成分}) (A \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) \\ &= a_{1j} \tilde{a}_{1\ell} + a_{2j} \tilde{a}_{2\ell} + \cdots + a_{nj} \tilde{a}_{n\ell} \\ &= \delta_{j\ell} |A| \end{aligned}$$

ゆえに $\tilde{A}A = |A|E$ であって、これを変形すれば与式を得る。

(注意) $n = 2$ のときは、おなじみの

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

の公式が導かれる。

9-11. クラメルの公式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

という n 元 1 次連立方程式を考える。係数行列 $A = (a_{ij})_{(i,j)}$ が正則のとき、

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

であるから、この方程式はただ一つの解をもつ。この式に前節で求めた逆行列の公式を代入すると、どうなるだろうか。

実際に、 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$ なので、

$$\begin{aligned} A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}b_1 + \tilde{a}_{21}b_2 + \cdots + \tilde{a}_{n1}b_n \\ \vdots \\ \tilde{a}_{1n}b_1 + \tilde{a}_{2n}b_2 + \cdots + \tilde{a}_{nn}b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ゆえに各成分を比較して次の式を得る。

$$x_j = \frac{1}{|A|} (\tilde{a}_{1j}b_1 + \tilde{a}_{2j}b_2 + \cdots + \tilde{a}_{nj}b_n)$$

右辺の括弧の中身は、行列 A の第 j 列目を $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に置き換えた行列

$$\begin{matrix} \text{第 } j \text{ 列} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

の行列式と等しい。(なぜならば、この行列の第 j 列の展開公式を書いてみれば、実際に確かめてみることができる。)

したがって、

$$x_j = \frac{\begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 列} \\ \left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| \end{array}}{\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right|}$$

である。これをクラメルの公式という。

(例)

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 0 \\ 3x & +y & +4z & = 3 \\ x & & +2z & = 2 \end{cases}$$

を解こう。係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式 $|A| = -1$ である。

$$x = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$y = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$z = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

のように解を得ることができる。

(注意) 解が不定の場合にはこの公式は使えない。

(注意) この公式では、基本的に計算量が減っていない。答えの具体的な形を式で示しているという点が便利なのである。その意味で、文字の個数が4個以上の場合には、行列式を求める手間が大変なので、実用的ではない。

(助言) 2元1次連立方程式について使えるようにしておくと、尊敬されること間違いありません。

(9 章練習問題)

(9-1) (標準) 次の行列式を求めよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

(9-2) (標準) 次の行列式を求め、因数分解せよ。できるだけ簡素な計算方法を追求せよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & ab & a+b \\ 1 & bc & b+c \\ 1 & ca & c+a \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ b & b+c+2a & c \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}$$

(9-3) (標準) 以下の計算をせよ。簡素な計算方法を追求せよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

(9-4) (標準) A, B が正方行列のとき、以下の式を証明せよ。ただし i は虚数単位とする。

$$(1) \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| \cdot |A - B|$$

$$(2) \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + iB| \cdot |A - iB|$$

(9-5) (標準) 次の等式を証明せよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = n!$$

(2) (数学的帰納法を用いよ)

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$$

(9-6) (1) (標準) 空間上の、一直線上にない三点 $P_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, P_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, P_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$

を通る平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられる。このことをできるだけ明快に示せ。(できれば行列式そのものの計算を行わないで示してほしい。)

- (2) (やや難) (1) の考え方を平面上の円に適用せよ。つまり、平面上の、一直線上にない三点 $P_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, P_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, P_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ を通る円の方程式を、 x, y, x_i, y_i などを成分に持つような 4×4 の行列式で表現せよ。
- (9-7) (標準) A を成分がすべて整数であるような正方行列であるとする。 A^{-1} の成分がすべて整数であることと、 $|A| = \pm 1$ であることとは必要十分条件であることを示せ。