

## 2008年度数学II前期期末試験 (担当：阿原)

解答用紙は1人に2枚配られる。1枚目の表に[1]、1枚目の裏に[2]、2枚目の表に[3]、2枚目の裏に[4]を解答せよ。

[1](20点)

空間内の点  $P \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $Q \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $R \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  と1次変換  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  が

$$f(P) = Q, f(Q) = P, f(R) = R$$

を満たすとする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $f$  を表す行列を  $A$  をするとき、 $A$  を求めよ。(5点)
- (2) 行列式の定義に基づいて  $|A|$  を求めよ。(5点)
- (3)  $A$  の成分を計算せずに  $|A|$  を知る方法を考えよ。出題者の想定解は2つ。まず1つは、行列  $A$  が満たすべき式を立てて、そこから直接導く方法である。それを説明せよ。(5点)
- (4) もう一つの想定解は、次の補助定理を証明した後に図形的に導く方法である。(補助定理も証明すること。)それを説明せよ。(5点)(注意!  $A$  は回転や面对称変換ではないので、決め付けないこと。)

補助定理：空間ベクトル  $a, b, c$  と  $3 \times 3$  行列  $A$  に対して、  
 $Aa, Ab, Ac$  の作る平行六面体の符号付体積は、 $a, b, c$  の作る  
平行六面体の符号付体積の  $|A|$  倍である。

[2](20点)

- (1) 3次の置換は全部で6種類ある。そのすべてを書き出し、それぞれが隣接互換の積で書き表せることを示せ。(アミダクジによって図示しても構わない。)(以下において、隣接互換それ自身は1つの隣接互換の積で表わされていると解釈し、恒等置換は0個の隣接互換の積で表わされていると解釈せよ。)(5点)

- (2)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  を隣接互換の積で書き表せ。(アミダクジによって図示しても構わない。)(5点)

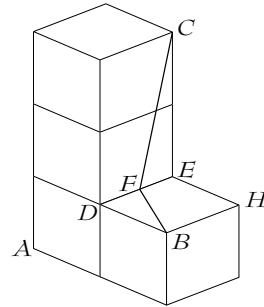
- (3) 任意の  $n$  次の置換は隣接互換の積であらわせることを  $n$  に関する数学的帰納法を用いて証明せよ。(  $n \geq 2$  とする。)(5点)

- (4) 置換  $\sigma$  の転倒数を  $a(\sigma) = \{(i, j) | i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$  によって定義するとき、任意の  $n$  次の置換  $\sigma$  は  $a(\sigma)$  個の隣接互換の積で表せ、しかも  $a(\sigma)$  が「 $\sigma$  を隣接置換の積で現す最小個数」であることを示せ。(5点)

[3](15点)

次の中学入試問題(一部改)を線形代数で解こう。

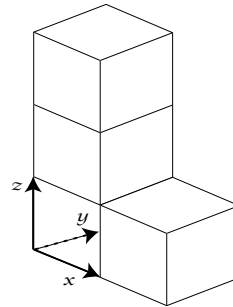
《問》立方体を図1のように積み上げ、点Aから点Eを図1のとおりとする。3点A, B, Cを通る平面でこの立体を切ったとき、その切り口と辺DEとの交わりをFとする。DF:FEを求めよ。



(図1)

(1) 図2のように座標を定め、立方体の一辺を1とする。平面ABCの式、直線DEの式を求め、DF:FEを計算せよ。(10点)

(2) ベクトルも座標も方程式も知らない小学生はこの問題をどのように解くのか? その方法を解説せよ。(5点)  
(追加) もし、3点A, C, Hを通る平面でこの立体を切ったときの切り口と辺DEとの交点をF' とすると、DF':F'Eはどうか。小学生の気持ちになって解くこと。(若干点)



(図2)

[4](15点)

学生証番号(アルファベットを除く)の下3桁をabcとする。(たとえば850454であれば $a=4, b=5, c=4$ であるとする。)このとき

$$r = \text{rank} \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ 2 & b & 0 & 6 \\ 4 & 5 & c & 6 \end{pmatrix}$$

を求めたい。(rankは階数の意味である。)以下の問いに答えよ。

(1) 自分の学生証番号でrを求めよ。((2)を先に計算して、それを適用しても良い。)(5点)

(2)  $r=2$ となるための $a, b, c$ に関する必要十分条件を提示せよ。(a, b, cは0となりうることに注意せよ。)(5点)

(3)  $r=2$ となる幸運な学生証番号(の下3桁)をすべて求めよ。(もし自分が $r=2$ だったとしても「すべて」求めよ。)(5点)