２００７年数学ＩＩ期末試験（２月１２日）（担当：阿原）

時間は９０分、満点は７０点である。[1] は１枚目の表側に、[2] は１枚目の裏側に、[3][4] は２枚目の解答用紙に解答すること。[1][2][4] の解答は、結果のみでなく思考過程や計算も必ず書くこと。

[1]（各７点、１４点）

$f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ を

$$f\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3u - 4v + 5w - x + y \\ u + v + 2w - 3x - 4y \\ -u + 2v - 3w + 2x - 2y \\ 2u - 5v + 3w + 2x + 5y \end{pmatrix}$$

により定めるとき、$\mathbf{Im}(f)$ ($= f$ の像)、$\mathbf{Ker}(f)$ ($= f$ の核）の基底の例を求めよ。

[2]（各７点、２１点）

ある人が、最初東を向いているものとする。１分ごとにサイコロを１回振り、[1][2] であれば 90 度右を向き、[3][4] であれば 90 度左を向き、[5][6] であればそのままであるとする。これを毎分繰り返すものとする。十分長い時間がたてば、東西南北のどちらを向いている確率もほぼ等しくなると予想されるが、それを以下の手順で証明せよ。

k 分後に東・南・西・北を向いている確率をそれぞれ e_k, s_k, w_k, n_k とする。ただし、$e_0 = 1, s_0 = 0, w_0 = 0, n_0 = 0$ であるとする。

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} e_k \\ s_k \\ w_k \\ n_k \end{pmatrix}$$

とおき、$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ が成り立つような正方行列 A を考える。（このような確率ベクトルの漸化式をマルコフ過程という。）

(1) A を具体的に書き，その固有値を求めよ。

(2) A を直交行列で対角化せよ。

(3) $\lim_{k\to\infty} A^k$、$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$ を求めよ。

[3]（２１点）

(1)「集合 A の元はすべて３の倍数」と同値な命題を以下から選べ。（３点）

a. ある $x \in \mathbf{Z}$ が存在して、任意の $y \in A$ に対して、$x = 3y$ である。

b. ある $x \in \mathbf{Z}$ が存在して、任意の $y \in A$ に対して、$3x = y$ である。

c. ある $x \in A$ が存在して、ある $y \in \mathbf{Z}$ に対して、$x = 3y$ である。

d. ある $x \in A$ が存在して、ある $y \in \mathbf{Z}$ に対して、$3x = y$ である。

e. 任意の $x \in A$ に対してある $y \in \mathbf{Z}$ が存在して、$x = 3y$ である。

f. 任意の $x \in A$ に対してある $y \in \mathbf{Z}$ が存在して、$3x = y$ である。

(2)「A ならば B」という命題が成り立た**ない**ことを示すにはどうすればよいか、以下の中から選べ。（３点）

a. A でないことを仮定して、B でないことを示す。

b. B でないことを仮定して、A でないことを示す。

c. A を仮定して、B でないことを示す。

d. A は正しいが B は満たされない例を探す。

e. A は満たされないが、B が正しい例を探す。

f. A も B も満たされないような例を探す。

(3)「任意の x について A または「B でない」」が正しく**ない**ことを示すにはどうすればよいか、以下の中から選べ。（３点）

a. A でなく、かつ B が成り立つような x の例を探す。

b. 任意の x について A が成りたたないことと、B が成り立つことの両方を示す。

c. x が A でないならば B が成り立つことを示す。

d.「x が B であるならば A にならない」ことを示す。

(4) 写像 $f : X \to Y$ が単射であることと、ある写像 $g : Y \to X$ が存在して $g \circ f = id$ であることの同値性の証明について、以下の空欄に適当な式を補いながら全証明を完成させよ。答案用紙に全証明を書き、自分が補った部分に下線を引くこと。[う][お] は複数行にわたってもよい。（各２点）

（証明）

写像 $f : X \to Y$ が単射であると仮定する。このとき写像 $g : Y \to X$ を次のように定義する。任意の $y \in Y$ について、$y = f(x)$ となる $x \in X$ が存在すれば、$g(y) =$[あ] とし、もし存在しなければ、$g(y)$ は [い] とする。こうして定義された $g(y)$ に対して、[う] なので、$g \circ f = id$ が示された。

逆に、$g \circ f = id$ となる写像 $g : Y \to X$ が存在したとする。任意の２元 $x_1, x_2 \in X$ が [え] であると仮定すると、[お] という計算により [か] が示され、これは f が単射であることの定義に合致する。以上により題意は示された。（証明終わり）

[4]（各７点、１４点）

A を $n \times n$ の上三角行列とし、A の対角成分はすべて正の数であるとする。（ただし、上三角行列とは、A の (i, j) 成分を a_{ij} としたとき、$i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ であるような行列のことを言う。）A を n 個の列ベクトルの並びと考え，$A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ と書き表したとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ は $\mathbf{R}^n$ の基底となることを示せ。

(2) $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ に、この順のままシュミットの直交化を施したとすると、どのようなベクトルの列が得られるか。