

2007年度数学II前期期末試験 (担当：阿原)

解答用紙は1人に2枚配られる。1枚目の表に[1]と[1の発展問題]、1枚目の裏に[2]、2枚目の表に[3]と[3の発展問題]、2枚目の裏に[4]を解答せよ。

[1](15点)

4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) $\text{Rank}(A)$ を求めよ。 a の値による場合分けを正しく行うこと。なお、二重根号は解消しておくこと。

(2) $a = \sqrt{3}$ のときの A^{-1} を求めよ。

[1の発展問題](5点)

問 [1] において、 a の場合分けに $2 \cos(\pi/5)$ が現れる。その理由を考察せよ。[1] に現れた数が $2 \cos(\pi/5)$ であることを示すのではなく、なぜそのような数が現れるのかを考えよ。一般に $n \times n$ 行列で同じような問題を考えたときには $2 \cos(\pi/(n+1))$ が現れるだろうか？

[2](15点)

以下の定理をベクトルの計算により証明せよ。

ニュートンの定理

平面上に4角形 $OABC$ があるとせよ。ただし、 OA と BC は平行ではなく、 AB と OC も平行でないとする。 OA と BC の交点を E 、 AB と OC の交点を F とする。線分 AC の中点を L 、線分 OB の中点を M 、線分 EF の中点を N とすると、3点 L, M, N は同一直線上にある。

(1) A, B, C, E, F の (O を原点とする) 位置ベクトルをそれぞれ a, b, c, e, f とする。 a と c は一次独立なので、ある実数 p, q が存在して、 $b = pa + qc$ と書ける。「 OA と BC は平行ではなく、 AB と OC も平行でない」という条件を p, q を使った式で表現せよ。

(2) e, f を p, q, a, c の式で表現せよ。

(3) ニュートンの定理を証明せよ。

[3](15 点)

複素 n 次正方行列 A が $A^* = -A$ を満たしており、かつ $E - A$ が正則であると仮定する。以下を示せ。ただし、どのような式変形が行われたかをなるべく説明すること。

- (1) $P = (E + A)(E - A)^{-1}$ としたとき、 $AP = PA$ を示せ。
- (2) P がユニタリ行列であることを示せ。
- (3) $P + E$ が正則であることを示せ。
- (4) $A = (P - E)(P + E)^{-1}$ を示せ。

[3 の発展問題](5 点)

実は複素 n 次正方行列 A が $A^* = -A$ を満たすならば、 $E - A$ は正則である。そのことを示せ。

[4](20 点)

n 次実正方行列 A に対して、実数に対応させるような写像 $f(A)$ が次の性質を満たすとする。 $f(A)$ を決定したい。以下の問いに答えよ。(なお、(1) ~ (4) のステップを踏まずに (5) が答えられるならば、それでもよい。)

- (a) $f(A + B) = f(A) + f(B)$ (A, B は任意の正方行列。)
- (b) $f(cA) = cf(A)$ (c は任意定数。 A は任意の正方行列。)
- (c) $f(AB) = f(BA)$ (A, B は任意の正方行列。)
- (d) $f(E) = 1$

(1) $f(O) = 0$ を示せ。

(2) (i, j) 成分のみが 1 でほかの成分が 0 であるような行列を E_{ij} と書くことにする。 i, j, k が $i \neq j, j \neq k$ のとき、 E_{ij} と E_{jk} をルール (c) に適用することにより、どのような結論を得るか。

(3) $P_n(i, j)$ を「左からかけると i 行と j 行を交換する基本変形を与える」ような正方行列 (授業でも同じ記号を用いた) であるとする。 $A_{k\ell}$ と $P_n(i, j)$ とルール (c) から、どのような結論を得るか。((2) の結果を踏まえた結論でよい。)

- (4) (d) を用いて $f(E_{11})$ を求めよ。
- (5) 任意の A に対して $f(A)$ を求めよ。