

第4回数学2演習 (5月27日, 担当: 阿原)

part I (目安30分)

(教科書や参考書を調べてもよいが, 自力のみで解くこと.
終了次第, 答案を提出すれば part2 の解答を始めてよい.)

[9]

(1) $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ について, ${}^tAA, A{}^tA$ を計算せよ.

(2) $Z_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}, Z_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ としたとき, $Z_1 + Z_2, Z_1 Z_2$ を計算せよ. また, 複素数 $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ に対して, $z_1 + z_2, z_1 z_2$ を計算し, 先の結果とあわせてみて, 複素数の計算を行列の計算に置き換えることができることを確かめよ.

(3) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ を確かめよ (ハミルトン=ケーリーの公式と呼ばれる.)

第4回数学2演習 (5月27日, 担当: 阿原)

part II

(友達と相談しながら解いてよい. 解けなかった者は, 6月10日演習までにレポートを書いて提出すること.)

[10]

(この問題は(5)まで解くことを目標とせよ. レポートを作成する場合にも(5)までを解けばよい.)

2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のすべての成分が整数であるとせよ. 2×2 行列のためのハミルトン=ケーリーの公式 $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ は既知としてよい. 式を簡単にするため, $p = a+d, q = ad-bc$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $A^2 = E$ となる A であって, $\pm E$ 以外のものはあるか. あるならばその例をあげよ.

(2) $A^3 = E$ かつ $A \neq E$ となる A について, p, q の取りうる値を求めよ.

(3) $A \neq E, A^2 \neq E, A^3 \neq E, A^4 = E$ となる A の例を挙げよ (見つけ方も書くこと.)

(4) $A \neq E, A^2 \neq E, A^3 \neq E, A^6 = E$ となる A の例を挙げよ (見つけ方も書くこと.)

(5) $A^5 = E$ かつ $A \neq E$ となる A が存在しないことを示せ.

(参考問題) $k \geq 7$ のときには $A \neq E, A^2 \neq E, \dots, A^{k-1} \neq E, A^k = E$ となる A が存在しないことを示せ.

(参考問題) 整数のみを成分とする 4×4 行列で, $A^5 = E$ かつ $A \neq E$ となる A が存在する. 具体的に見つけよ (見つけ方も書くこと.)