15　対称行列と２次曲線

15-1　実対称行列とエルミート行列の対角化

実対称行列 A とは実数を成分とする行列であって ${}^tA = A$ となる行列のことである。(対角成分を境にして、右上と左下の成分が対称に現れる行列。$A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)}$ としたとき $a_{ij} = a_{ji}$ となる行列のこと。)

定理（対称行列の性質）

(1)　A が n 次対称行列、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ をベクトルとすると、

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$$

である。ただし、内積はエルミート内積であるとする。

(2)　対称行列 A の固有値はすべて実数である。よって、必ず実数ベクトルの固有ベクトルが得られる。

(3)　n 次元計量線形空間 V（計量を (,) とする）に対して、線形写像 $A : V \to V$ が $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ を満たすならば、任意の正規直交基底に関して A は対称行列で表わされる。((1) の逆命題)

(4)　A の異なる固有値の固有ベクトルは直交する。

(5)　A の固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ として、その固有空間をそれぞれ $W_1, \cdots, W_r$ であるとする。($W_r = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \alpha_j \boldsymbol{x}\}$) このとき、$W_1 \dot{+} \cdots \dot{+} W_r = \boldsymbol{R}^n$（直和）である。

(6)　A は直交行列 P により対角化できる。(直交行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列であるようにできる。)

証明:

(1)　$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(A\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tA\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{A\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$

(2)　A の固有値 α と、その固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を考える。つまり $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ である。

$$\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = \bar{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

したがって、$\alpha = \bar{\alpha}$ であり、α は実数。

(3)　V の正規直交基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ に対して、A の行列表示の (i, j) 成分 a_{ij} は

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

で与えられる。$(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i) = \delta_{ij}$ を用いると、

$$a_{ij} = (A\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i)$$

が得られる。このことより、

$$a_{ij} = (A\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{e}_j, A\boldsymbol{e}_i) = a_{ji}$$

(4)　α,β を A の固有値（$\alpha \neq \beta$）とし、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ をそれぞれの固有ベクトルとする。つまり $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{y}$ である。

$$\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = \beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

となるので、（β は実数であることに注意しよう。）$(\alpha - \beta)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ であり、$\alpha \neq \beta$ であることから $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とは直交する。

(5)　n に関する数学的帰納法を用いる。$n = 1$ の場合には、A は実数の定数倍であり、そのまま $W_1 = \boldsymbol{R}$ である。

$k=1,2,\cdots,n{-}1$ の場合には任意の k 次対称行列に A について、$W_1\dot{+}\cdots\dot{+}W_r=\boldsymbol{R}^k$ が成り立っていると仮定する。そして、$k=n$ の場合について証明する。

まず $V=W_1^{\perp}$ と定義する。このとき、任意の $\boldsymbol{v}\in V$ を一つ固定したとき、次の補題が成り立つ。

補題

$A\boldsymbol{v}\in V$ である。

補題の証明： W_1 は固有値 α_1 の固有空間であるから、任意の $\boldsymbol{x}\in W_1$ に対して、$A\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}$ であり、かつ $\boldsymbol{v}\in W_1^{\perp}$ であるから $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=0$ である。すると、

$$(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{v})=(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=\alpha_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=0$$

となり、任意の $\boldsymbol{x}\in W_1$ に対して、$(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{v})=0$ であることがわかる。すなわち $A\boldsymbol{v}\in W_1^{\perp}=V$ である。（補題の証明終わり）

このことから、行列 A は $A:V\to V$ という線形写像であるとみなせる。さらに A は対称行列であることから、$(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})$ を満たすので、(3) のの条件を満たすことになり、V 上の正規直交基底による A の表現行列は（A とは異なるが）対称行列になる。異なる固有値の固有ベクトルは互いに直交することから、固有値 $\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ の固有空間は $V=W_1^{\perp}$ に含まれる。すると、V は $\mathbb{R}^n$ より次元が低いので、帰納法の仮定を用いることができて、

$$V=W_2\dot{+}\cdots\dot{+}W_r$$

であることがわかる。$V=W_1^{\perp}$ であったから、

$$\boldsymbol{R}^n=W_1\dot{+}W_1^{\perp}=W_1\dot{+}W_2\dot{+}\cdots\dot{+}W_r$$

であり、証明は終了する。

(6)　各固有値 α_j に対する固有空間 W_j の正規直交基底を固有ベクトルとして取る。(5) の結果は、固有空間の次元の和が n であることを主張しているので、n 個の正規直交な固有ベクトルを取ることができ、それらを横に並べたものを P とすれば、$P^{-1}AP$ は対角行列になることが分かる。正規直交な n 個のベクトルを並べたものは正規直交基底であって、行列 P は直交行列となる。（証明終わり）

注意：A が対称行列のとき、各固有空間について正規直交基底をとって対角化すれば、対角化のための変換行列はおのずと直交行列になっている。とても便利な定理である。（固有空間の正規直交基底をとりたければ、一度普通に基底を求めておいて、それをシュミットの直交化で正規直交基底に変換すればよい。）

証明はしないが、複素ベクトル空間の場合に、上の定理はエルミート行列 ($A^* = A$ を満たす行列) についても、似たような定理が成立する。具体的には以下のとおりである。証明は省略するが、方法は実ベクトル空間の場合を倣って行うことができる。各自試してみることを勧める。

定理

(1)　エルミート行列 A に対して、$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ である。

(2)　A の固有値は実数である。

(3)　A の異なる固有値の固有ベクトルは（複素数ベクトルとして）互いに直交する。

(4)　A はユニタリ行列 P によって対角化できる。

15-2 2次曲線の標準形

x, y の2次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

を考える。（ただし、a, b, c のうち少なくとも一つは 0 でないと仮定する。）この方程式の解は一般的に平面上の曲線になり、大まかに楕円、放物線、双曲線に分類できる。（非常に特別な場合、ほかの形になる。たとえば2本の直線、1本の直線、1点、空集合などの場合もありうる。）楕円、放物線、双曲線は**2次曲線**、または**円錐曲線 (conic)** と呼ばれ、射影幾何学以来の重要な研究対象である。円錐曲線の名前は、円錐形

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を平面で切った時に、楕円、放物線、双曲線が現れることに由来している。

与えられた2次曲線がどのような形をしているかを計算する方法を紹介する。まず、行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

で定義する。これは対称行列である。この行列を用いる理由は

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

という計算によるものであることを注意しておく。

前の節に紹介した定理により、「任意の対称行列は直交行列により対角化できる」のである。その直交行列を P としよう。つまり、行列 A の固有値を

h, k であるとすると、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

となっている。直交行列は $P^{-1} = {}^tP$ を満たしていることに注意しよう。（直交行列の定義。）新しい座標 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を

$$P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって定義する。そうすると、

$$\begin{aligned}
&ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \\
&\quad = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f \\
&\quad = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} {}^tPAP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f \\
&\quad = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f \\
&= hx'^2 + kx'^2 + d'x' + e'y' + f
\end{aligned}$$

となる。（ただしここで、$\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix}$ とおいた。）この最後の形を 2 次曲線の標準形と呼ぶことにする。この方法は 3 変数以上の 2 次式についても同じように行うことが可能である。

　ここで、直交行列によって対角化したことの意味を考えてみよう。13 節で述べたように、直交行列は等長的（ベクトルの長さを保つような写像）であるので、平面における直交行列は合同変換（つまり、回転または線対称）を

与えていることがわかる。（練習問題 (2-3) を参照しよう。）したがって、２次曲線の標準形とはもとの２次曲線を回転・線対称により分かりやすい形に移動したものだと考えることができる。（したがって、単に xy の項を消去したよりも意味がある。）

以下は大まかな分類である。

（場合１）$h>0$ かつ $k>0$（または $h<0$ かつ $k<0$）のとき

この場合には楕円になる。（$h=k$ の場合には円になる。）ただし、$x^2+y^2=0$ の時には１点、$x^2+y^2=-1$ の時には空集合になることにも注意しよう。

（場合２）$h>0$ かつ $k<0$（または $h<0$ かつ $k>0$）のとき

この場合には双曲線になる。ただし、$\alpha^2x^2-\beta^2y^2=0$ の形の時にはこれは２直線を表わしている。

（場合３）$h\neq 0$ かつ $k=0$ のとき

この場合には放物線になる。

15-3 2次曲面の標準形

3 つの変数 x, y, z によって表わされる式は、一般的に空間内の曲面を与える。（1 次式であるならば平面を与える。）ここでは x, y, z の 2 次方程式

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx + gx + hy + jz + k = 0$$

で与えられるような $\mathbb{R}^3$ の部分集合（曲面）を考える。（ただし、a, b, c, d, e, f のうち少なくとも一つは 0 でないと仮定する。）

前の章からの類推で、直交行列による変数変換を行うことにより xy, yz, zx の項を消去することが可能である。実際には、行列

$$A = \begin{pmatrix} a & d/2 & f/2 \\ d/2 & b & e/2 \\ f/2 & e/2 & c \end{pmatrix}$$

を考え、これを直交行列 P によって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix}$$

と対角化する。新しい座標を $P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ により定め、$\begin{pmatrix} g & h & j \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} g' & h' & j' \end{pmatrix}$ とおくと、前節と同じ計算により

$$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + j'z' + k = 0$$

という形の式を考えれば十分ということであるが，a', b', c' が 0 でなければ x, y, z のそれぞれについて平方完成をおこなえば、

$$a'(x + g'/2a')^2 + b'(y' + h'/2b')^2 + c'(z + j'/2c')^2 + k' = 0$$

という形になり、適切な平行移動の後に

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = d'$$

の形の式を考えれば十分であることが分かる。a', b', c' のどれかが 0 であるような場合、たとえば

$$b'y^2 + c'z^2 + g'x + h'y + j'z + k = 0$$

のような場合も考察する必要がある。

この観点から、2 次曲面の大まかな分類を上げておく。詳細に分類しようとすると、$x^2 + y^2 + z^2 = -1$ のように空集合ということもありうるし、3 つの変数のうちの 1 つが消えてしまえば、一般に柱面になるが、そのような場合はここでは触れないことにする。（たとえば、$\{(x, y, z) | x^2 - y^2 = 1\}$ は双曲線柱になるが、これは 2 次曲線において分類済みであると考え，ここでは除外して考える。）大きく言って次のタイプに分かれる。

(1) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \quad (a, b, c > 0)$ ··· 球面、楕円球面

(2) $ax^2 + by^2 - cz^2 = 1 \quad (a, b, c > 0)$ ··· 1 葉双曲面

(3) $ax^2 + by^2 - cz^2 = -1 \quad (a, b, c > 0)$ ··· 2 葉双曲面

(4) $ax^2 + by^2 + cz = \pm 1 \quad (a > 0, b > 0, c \neq 0)$ ··· 放物楕円面

(5) $ax^2 - by^2 + cz = \pm 1 \quad (a > 0, b < 0, c \neq 0)$ ⋯ 放物双曲面

(6) $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0 \quad (a, b, c > 0)$ ⋯ 楕円錐面