１2　部分空間

12-1　部分線形空間

定義（部分線形空間）

線形空間 V の部分集合 W が、（V における和と定数倍に関して）線形空間であるとき、W を (V の) **線形部分空間 (linear subspace)** という。

（注意) 部分集合で線形空間だから線形部分空間。（＜わかりやすい言葉だ）

（注意） W における和と定数倍に関して、と断ったので、

（条件）　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ と $a \in \boldsymbol{R}$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W, a\boldsymbol{x} \in W$

が必要条件であるが、これは十分条件でもある。というのは、この条件さえ満たされれば、和や定数倍に関する基本的な公式はすべて成り立つことが (V の性質により) 保障されているからである。

有限次元線形空間の場合、次の二つが満たされている場合は部分線形空間と思って間違いない。

（1）１次式で表現されていること。

（2） 零ベクトル $\boldsymbol{o}$ が含まれていること。

たとえば、「正方行列全体の集合の中の、トレース $\mathrm{Tr}(A) = 0$ であるような行列全体」を例にとると、$\mathrm{Tr}(A) = 0$ という式は１次式であり、零行列 O は $\mathrm{Tr}(O) = 0$ をみたす。だから部分線形空間だろうという予想が立つ。実際に定義に戻って確かめてみるといい。

（注意）V 自身、および $\{\boldsymbol{o}\}$ は、部分集合であり、かつ線形空間であるから、V の線形部分集合であるといえる。この二つを自明な線形部分集合という。

12-2　部分線形空間の演算

定義

線形空間 X の部分線形空間 V, W に対して、その共通部分 (intersection)$V \cap W$ もまた線形部分空間である。

なぜならば、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \cap W,\ a \in \boldsymbol{R}$ に対して、$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V,\ a\boldsymbol{u} \in V$ であり、かつ $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W,\ a\boldsymbol{u} \in W$ でもある。このことより $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V \cap W$, $a\boldsymbol{u} \in V \cap W$ であることがわかるからである。

定義

線形空間 X の部分線形空間 V, W に対して、その和空間 (sum of linear subspace) を

$$V + W = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W\}$$

により定義すると、これは線形部分空間である。

（証明）

$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}' \in V + W$ に対して、

$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}') = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') + (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}') \in V + W$$

$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in V + W, a \in \boldsymbol{R}$ に対して、

$$a(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = a\boldsymbol{v} + a\boldsymbol{w} \in V + W$$

であるから。（証明終わり）

定義

線形空間 X の部分集合 $S=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_r\}$ に対して、

$$\mathrm{span}(S)=\{a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_r\boldsymbol{v}_r|a_1,a_2,\cdots,a_r\in\boldsymbol{R}\}$$

と定義し、これを**集合 S による張られる空間 (a linear space spanned by S)** という。記号として、

$$\mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_r)$$

と書かれることも多い。$\mathrm{span}(S)$ は一般に線形部分空間である。

（証明）

$a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_r\boldsymbol{v}_r, a'_1\boldsymbol{v}_1+a'_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a'_r\boldsymbol{v}_r\in\mathrm{span}(S)$ に対して、和は

$$\begin{aligned}&a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_r\boldsymbol{v}_r+a'_1\boldsymbol{v}_1+a'_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a'_r\boldsymbol{v}_r\\&=(a_1+a'_1)\boldsymbol{v}_1+(a_2+a'_2)\boldsymbol{v}_2+\cdots+(a_r+a'_r)\boldsymbol{v}_r\in\mathrm{span}(S)\end{aligned}$$

と閉じているし、定数倍 ($a\in\boldsymbol{R}$) についても

$$\begin{aligned}&a(a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_r\boldsymbol{v}_r)\\&=(aa_1)\boldsymbol{v}_1+(aa_2)\boldsymbol{v}_2+\cdots+(aa_r)\boldsymbol{v}_r\in\mathrm{span}(S)\end{aligned}$$

と閉じている。以上より $\mathrm{span}(S)$ は部分線形空間である。（証明終わり）

（注意）

$S=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_r\}$ は線形独立である必要はない。どのような集合に対しても $\mathrm{span}(S)$ は定義される。（S は無限集合でもかまわない。）

（注意） $V+W=\mathrm{span}(V\cup W)$ である。$V\cup W$ は部分線形空間ではないことに注意しよう。

定義

線形写像 $f:X\to X'$ があるとする。X の線形部分空間 V の f による**像 (image)**

$$f(V)=\{\boldsymbol{w}\mid\boldsymbol{w}=f(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}\in V\}$$

は X' の線形部分空間である。また、写像 f による**核 (kernel)**

$$\mathrm{Ker}(f):=\{\boldsymbol{v}|f(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{o}\}$$

は X の線形部分集合である。

（証明） $f(V)$ の任意の 2 元は、$f(\boldsymbol{v}),f(\boldsymbol{v}')$ と表すことができる。和に関しては

$$f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{v}')=f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')\in f(V)$$

定数倍に関しては

$$af(\boldsymbol{v})=f(a\boldsymbol{v})\in f(V)$$

と閉じているので、$f(V)$ は部分線形空間である。

$\ker(f)$ の任意の 2 元 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'$ を考える。和に関しては

$$f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')=f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{v}')=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$$

したがって、$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'\in\ker(f)$ である。定数倍に関しては

$$f(a\boldsymbol{v})=af(\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$$

したがって $a\boldsymbol{v}\in\ker(f)$ である。以上より $\ker(f)$ は部分線形空間である。（証明終わり）

12-3　像と核に関する次元の公式

命題

線形写像 $f : X \to X'$ において、次の公式が成り立つ。

$$\mathrm{dim}X = \mathrm{dimKer}(f) + \mathrm{dim}f(X)$$

（証明） $\mathrm{dim}X = n$, $\mathrm{dimKer}(f) = m$ とする。$\mathrm{Ker}(f)$ は X の線形部分空間であるから、$m \leq n$ である。$\mathrm{Ker}(f)$ の基底をひとつ固定して考える。それを $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m \rangle$ であるとしよう。11-2 節より、$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m \rangle$ を含むような X の基底が少なくともひとつ存在する。それを $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ であるとしよう

もし $n = m$ であるならば、$X = \mathrm{Ker}(f)$ であることになり、すべての X の元 $\boldsymbol{x}$ は $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ を満たす。したがって、$f(X) = \{\boldsymbol{o}\}$ であって、$\mathrm{dim}f(X) = 0$ である。したがって、与命題は成り立つ。

もし $n > m$ であるならば、$\boldsymbol{e}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ について、これらを f で写したもの $f(\boldsymbol{e}_{m+1}), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)$ を考える。

まず第 1 に $f(\boldsymbol{e}_{m+1}), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)$ は線形独立であることを示そう。

$$a_{m+1}f(\boldsymbol{e}_{m+1}) + \cdots + a_n f(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{o}$$

であると仮定する。これより

$$f(a_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} + \cdots + a_n \boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{o}$$

であるから、すなわち

$$a_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} + \cdots + a_n \boldsymbol{e}_n \in \mathrm{Ker}(f)$$

であることを意味する。さらに、$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m \rangle$ は $\mathrm{Ker}(f)$ の基底であることから、この元は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ の線形結合で表されることになる。したがって

$$a_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n = a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{e}_m$$

と書くことができる。一方で、$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ は X の基底であることから、$a_1 = \cdots = a_n = 0$ である。以上より $f(\boldsymbol{e}_{m+1}), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)$ は線形独立である。

次に $f(X)$ の元が $f(\boldsymbol{e}_{m+1}), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)$ の線形結合で表わせることを示そう。$f(X)$ の任意の元は $f(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} \in X)$ と表わされる。$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ は X の基底だから、

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{e}_m + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$$

と書ける。この両辺を f で写すと

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}) &= f(a_1\boldsymbol{e}_1) + f(a_2\boldsymbol{e}_2) + \cdots + f(a_m\boldsymbol{e}_m) + \cdots + f(a_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= a_1 f(\boldsymbol{e}_1) + a_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + a_m f(\boldsymbol{e}_m) + \cdots + a_n f(\boldsymbol{e}_n) \\ &= a_{m+1} f(\boldsymbol{e}_{m+1}) + \cdots + a_n f(\boldsymbol{e}_n) \end{aligned}$$

以上の考察により、$\langle f(\boldsymbol{e}_{m+1}), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n) \rangle$ は $f(X)$ の基底であり、その次元は $n-m$ である。このことより、

$$\mathrm{dimKer}(f) + \mathrm{dim}f(X) = m + (n-m) = n = \mathrm{dim}X$$

となり、題意は示された。（証明終わり）

12-4　線形部分空間に関する次元の公式

命題

$W_1 \subset W_2, \dim W_1 = \dim W_2 \Rightarrow W_1 = W_2$

（証明）

背理法を用いる。$W_1 \subset W_2$ かつ $\dim W_1 = \dim W_2$ かつ $W_1 \neq W_2$ であると仮定して矛盾を導く。$W_1 \subset W_2$ かつ $W_1 \neq W_2$ であることから、$\boldsymbol{v} \in W_2$ であって $\boldsymbol{v} \notin W_1$ であるものが存在する。W_1 の基底を $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ とすると、$\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の線形結合では表わせない。したがって、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{v}$ は線形独立であり、W_2 は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{v}$ を含む基底をもつ。したがって、$\dim W_2 \geq n+1$ となり、$\dim W_1 = \dim W_2$ に矛盾する。（証明終わり）

命題

$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 + W_2) + \dim (W_1 \cap W_2)$

（証明） $W_1 \cap W_2$ の基底をひとつ固定する。これを $\langle \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ であるとする。

$W_1 \cap W_2$ は W_1 の部分線形空間であるから、$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ を含むような W_1 の基底が存在する。それを $\langle \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s \rangle$ とする。

$W_1 \cap W_2$ は W_2 の部分線形空間であるから、$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ を含むような W_2 の基底が存在する。それを $\langle \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_t \rangle$ とする。

以上のおき方より、$\dim (W_1 \cap W_2) = r$, $\dim W_1 = r + s$, $\dim W_2 = r + t$ である。

これらをあわせた集合 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_t$ が $W_1 + W_2$ の基底になっていることを今から証明しよう。

まず、$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_t$ が線形独立であることを示す。線形関係

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r + y_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + y_s\boldsymbol{b}_s + z_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + z_t\boldsymbol{c}_t = \boldsymbol{o}$$

があるとしよう。これを移項して、

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r + y_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + y_s\boldsymbol{b}_s = -z_1\boldsymbol{c}_1 - \cdots - z_t\boldsymbol{c}_t$$

を得る。左辺は W_1 の元である。右辺は W_2 の元であるが、構成方法より、$\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_t$ は $W_1 \cap W_2$ に含まれないので、特に $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ の線形結合では表わせない。このことより $z_1 = \cdots = z_t = 0$ であって、両辺は $\boldsymbol{o}$ でなければならない。$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r + y_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + y_s\boldsymbol{b}_s = \boldsymbol{o}$ より $x_1 = \cdots = x_r = y_1 = \cdots = y_s = 0$ を得る。以上により線形独立性は示された。

次に、$W_1 + W_2$ の任意の元が、$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_t$ の線形結合で表わされることを示す。

$W_1 + W_2$ の任意の元は $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ であって、$\boldsymbol{v}_1 \in W_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_2$ であるように書ける。今、それぞれを基底の線形結合で表わすと、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= u_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + u_r\boldsymbol{a}_r + x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{b}_s \\ \boldsymbol{v}_2 &= y_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + y_r\boldsymbol{a}_r + z_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + z_t\boldsymbol{c}_t \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \quad & (u_1 + y_1)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (u_r + y_r)\boldsymbol{a}_r \\ & + x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{b}_s \\ & + z_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + z_t\boldsymbol{c}_t \end{aligned}$$

であり、題意は示された。

以上より、$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_t$ は $W_1 + W_2$ の基底であり、その次元は $r + s + t$ であることが示された。したがって、

$$\dim W_1 + \dim W_2 = r + s + r + t = \dim (W_1 + W_2) + \dim (W_1 \cap W_2)$$

が示された。（証明終わり）

12-5 線形空間の直和

命題

二つの線形空間 W_1, W_2 に関する以下の 3 つの命題は互いに必要十分条件（同値命題）である。

(1)　$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$

(2)　$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 + W_2)$

(3)　任意の $W_1 + W_2$ の元は、W_1 の元と W_2 の元の和として、表わし方がただ一通りである。

(1) ⇒ (2) の証明

12-4 節の次元公式により、$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 + W_2) + \dim (W_1 \cap W_2)$ である。もし $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ であるならば、$\dim (W_1 \cap W_2) = 0$ であるから、(2) が成り立つ。

(2) ⇒ (1) の証明

12-4 節の次元公式により、$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 + W_2) + \dim (W_1 \cap W_2)$ である。もし $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 + W_2)$ であるならば、$\dim (W_1 \cap W_2) = 0$ であるから、(1) が成り立つ。

(1) ⇒ (3) の証明

$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ を仮定する。$W_1 + W_2$ の元について、二通りの書き表し方 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ ができたとする。ただしここで $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_2 \in W_2$ である。この等式よりただちに

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{v}_2$$

である。この式の左辺は W_1 の元であり、この式の右辺は W_2 の元である。それが等しいということはこの両辺は $W_1 \cap W_2$ の元であることになる。仮定よりそれは $\{\boldsymbol{o}\}$ であるので、この両辺は $\boldsymbol{o}$ であることが示される。したがって、

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2$$

が示され、(3) が正しい。

(3) $\Rightarrow$ (1) の証明

任意の $W_1 + W_2$ の元は、W_1 の元と W_2 の元の和として、表わし方がただ一通りであると仮定する。W_1 の基底を $\langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$, W_2 の基底を $\langle \boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m \rangle$, とする。このとき、任意の $\boldsymbol{f}_j \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$ は $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の線形結合では表わされない。なぜなら、もしあらわされたとすると、

$$\boldsymbol{f}_j = x_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n$$

とかけることになる。この両辺はいずれも $W_1 + W_2$ の元であるが、それが二通りの書き方で表わされたことになり矛盾である。任意の $\boldsymbol{f}_j \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$ は $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の線形結合では表わされないことから、$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ である。

定義 線形部分空間 W_1, W_2 が上記命題の条件（のいずれか）をみたすとき、その和は**直和 (direct sum)** と呼ばれ、$W_1 \dot{+} W_2$ で書かれる。

12-6 線形空間の商空間

２００９年度、ここは試験範囲外である。

V を線形空間、W をその線形部分空間であるとする。このとき、V に次のような同値関係を定義することができる。

$$\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v} \Longleftrightarrow \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in W$$

（この $\sim$ が同値関係である証明）

まず、 $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \in W$ であるから反射律は正しい。次に $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$ だと仮定すると $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in W$ であるが、$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \in W$ であるから、対称律も正しい。最後に、$\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{w}$ だと仮定すると、$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in W$ であるが、$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) \in W$ であるから、推移律も正しい。以上により $\sim$ は同値関係である。

この同値関係による商集合 $V/\sim$ を**商空間 (quotient space)** といい、記号として V/W と書く。

注意： $V/\sim$ の要素は同値関係の記号を使えば $C(\boldsymbol{u})$ と書かれるところであるが、多くの場合 $\overline{\boldsymbol{u}}$ と書かれる。このテキストでもこちらの記号を用いる。

注意： 線形空間を加群 (module, abelian group) であると考えるとき，線形部分空間は正規部分群であって、その商群を考えたものと一致する。

定理

(1) W を V の線形部分空間であるとする。このとき、W/V は（自然な方法で）線形空間である。

(2) W の基底を $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r \rangle$ とし、この基底を含むような V の基底を $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ であるとする。このとき、

$$\langle \overline{\boldsymbol{e}_{r+1}}, \overline{\boldsymbol{e}_{r+2}}, \cdots, \overline{\boldsymbol{e}_n} \rangle$$

は V/W の基底である。

(3) V, W が有限次元であれば、$\mathrm{dim}V = \mathrm{dim}W + \mathrm{dim}(V/W)$ である。

証明： (1) V/W の任意の要素 $\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{v}}$ に対して、その和を

$$\overline{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{v}} = \overline{(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})}$$

により定義する。また定数 k 倍を

$$k\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{(k\boldsymbol{u})}$$

により定義する。（これは意味が分かりにくいかもしれないが、左辺は V/W による演算、右辺は V による演算であることに注意しよう。）この定義が well-defined である証明をする必要がある。$\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{\boldsymbol{u}'}$ ということは、$\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{u}'$ ということであり、定義にさかのぼれば $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' \in W$ ということである。このことを何度も用いるので最初に確認しておく。$\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{\boldsymbol{u}'}, \overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{v}'}$ であるならば、当然 $\overline{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{u}'} + \overline{\boldsymbol{v}'}$ でなければならないが、そうなっているかどうかは実際に定義にさかのぼって確かめてみなければいけない。これが well-defined を

確かめるという作業なのである。

$$
\begin{aligned}
&(\overline{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{v}}) = \overline{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}} \\
&= \overline{\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}' + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')} \\
&= \overline{\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}'} \\
&= \overline{\boldsymbol{u}'} + \overline{\boldsymbol{v}'}
\end{aligned}
$$

ここで、１つ目の等号は和の定義による。２つめは V の足し算より。３つ目の等号は $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in W$ であることより。４つ目の等号は和の定義による。以上により示された。同様に、

$$
\begin{aligned}
&k\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{k\boldsymbol{u}} \\
&= \overline{k\boldsymbol{u}' + k(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}')} \\
&= \overline{k\boldsymbol{u}'} \\
&= k\overline{\boldsymbol{u}'}
\end{aligned}
$$

である。このように V/W には自然に和と定数倍が定義されているので，線形空間であるということができる。

(2) まず $\overline{\boldsymbol{e}_{r+1}}, \overline{\boldsymbol{e}_{r+2}}, \cdots, \overline{\boldsymbol{e}_n}$ が線形独立であることを示す。 $c_{r+1}\overline{\boldsymbol{e}_{r+1}} + c_{r+2}\overline{\boldsymbol{e}_{r+2}} + \cdots + c_n\overline{\boldsymbol{e}_n} = \overline{\boldsymbol{o}}$ であるとすると、和の定義により、

$$
\overline{c_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + c_{r+2}\boldsymbol{e}_{r+2} + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n} = \overline{\boldsymbol{o}}
$$

であるが、この式は

$$
c_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + c_{r+2}\boldsymbol{e}_{r+2} + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n \in W
$$

を意味している。W の基底が $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r \rangle$ と与えられていることから、この基底の線形結合によって、

$$
c_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + c_{r+2}\boldsymbol{e}_{r+2} + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{e}_r
$$

と表わせる。一方で、$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ が V の基底であることから、この係数はすべて 0 でなければならない。すなわち

$$c_{r+1} = c_{r+2} = \cdots = c_n = 0$$

であり、$\overline{\boldsymbol{e}_{r+1}}, \overline{\boldsymbol{e}_{r+2}}, \cdots, \overline{\boldsymbol{e}_n}$ が線形独立であることが示された。

次に任意の V/W の要素を考えてみる。任意の $\boldsymbol{v} \in V$ は $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n$ とあらわされることから、任意の V/W の元 $\overline{\boldsymbol{v}}$ は

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n}$$

とかける。このうち $c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{e}_r \in W$ であるから、

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{v}} &= \overline{c_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + c_{r+2}\boldsymbol{e}_{r+2} + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n} \\ &= c_{r+1}\overline{\boldsymbol{e}_{r+1}} + c_{r+2}\overline{\boldsymbol{e}_{r+2}} + \cdots + c_n\overline{\boldsymbol{e}_n} \end{aligned}$$

となり、$\overline{\boldsymbol{e}_{r+1}}, \overline{\boldsymbol{e}_{r+2}}, \cdots, \overline{\boldsymbol{e}_n}$ の線形結合で表わされることが示された。

(3) 基底の要素の個数を数えることにより与式が成り立つことが示される。(証明終わり)

定理

$f : V \to W$ を線形写像であるとする。$\overline{f} : V/\ker(f) \to \mathrm{Im}(f)$ を　$\overline{f}(\overline{\boldsymbol{u}}) = f(u)$ により定義すると、この写像は well-defined であって、同型写像である。

注意：　この定理の系として、核と像に関する次元公式が得られる。また、この定理は群論における準同型定理の系であると考えることもできる。

証明：　写像 $\overline{f}$ が well-defined であること：

$\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{\boldsymbol{u'}}$ であるならば、$\overline{f}(\overline{\boldsymbol{u}}) = \overline{f}(\overline{\boldsymbol{u'}})$ でなければならないので、そのことを証明する。

$\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{\boldsymbol{u'}}$ であるならば、$\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{u}'$ であって、$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' \in \ker(f)$ である。このことからただちに $f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}') = \boldsymbol{o}$ であって、$f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}')$ である。このことは結論が正しいことを意味している。

写像 $\overline{f}$ が線形写像であること：

任意の $\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{v}} \in V/\ker(f)$ に対して、$\overline{f}(\overline{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{v}}) = f(u) + f(v)$ であることと、$\overline{f}(k\overline{\boldsymbol{u}}) = kf(u)$ であることを示せばよい。実際に、

$$
\begin{aligned}
&\overline{f}(\overline{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{v}}) = \overline{f}(\overline{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}}) \\
&= f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})。\\
&\overline{f}(k\overline{\boldsymbol{u}}) = \overline{f}(\overline{k\boldsymbol{u}}) \\
&= f(k\boldsymbol{u}) = kf(\boldsymbol{u})
\end{aligned}
$$

である。

写像 $\overline{f}$ が同型写像であること：

「核と像の次元公式」の証明を引用する。$\ker(f)$ の基底を $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r \rangle$ とし、この基底を含むような V の基底を $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ であるとする。このとき、

$$\langle f(\boldsymbol{e}_{r+1}), f(\boldsymbol{e}_{r+2}), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n) \rangle$$

は $\mathrm{Im}(f)$ の基底である。

一方で、同じ記号を用いて

$$\langle \overline{\boldsymbol{e}_{r+1}}, \overline{\boldsymbol{e}_{r+2}}, \cdots, \overline{\boldsymbol{e}_n} \rangle$$

は $V/\ker(f)$ の基底である。このことから、$V/\ker(f)$ の基底と $\mathrm{Im}(f)$ の基底

とは、個数が同じであり、かつ写像 $\overline{f}$ によって 1 対 1 に対応していることがわかり、写像 $\overline{f}$ が同型写像であることが示される。

12-7 双対空間、双対基底

２００９年度、ここは試験範囲外である。

V を線形空間とする。V から $\boldsymbol{R}$ への線形写像全体の集合を V^* と書く。

$$V^* := \{f : V \to \boldsymbol{R} \mid f \text{ は線形写像 }\}$$

この V^* を V の**双対空間（双対線形空間）(dual linear space)** と呼ぶ。V^* には次のように、「写像の和」と「写像の定数倍」を定義することができ、V^* も線形空間である。実際に、$f, g \in V^*$ に対して、

和 $f + g \in V^*$ を $(f+g)(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$、

定数倍 $cf \in V^*$ を $(cf)(\boldsymbol{x}) := cf(\boldsymbol{x})$

と定義する。

（注意） $f+g, cf$ は V^* の元であることを確かめなければいけない。V から $\boldsymbol{R}$ への写像であることは定義より正しいので、あとは線形写像であることを確かめる。

$$\begin{aligned}
(f+g)(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) &= f(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) + g(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) \\
&= af(\boldsymbol{x}) + bf(\boldsymbol{y}) + ag(\boldsymbol{x}) + bg(\boldsymbol{y}) \\
&= a(f+g)(\boldsymbol{x}) + b(f+g)(\boldsymbol{y}) \\
(cf)(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) &= cf(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) \\
&= caf(\boldsymbol{x}) + cbf(\boldsymbol{y}) \\
&= a(cf)(\boldsymbol{x}) + b(cf)(\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

よって、題意は示された。

V の基底 $E : \langle bfe_1, \cdots, bfe_n \rangle$ に対して、V^* の元 $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ を

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j$$

により定義する。言い換えれば、

$$\boldsymbol{f}_i(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_i$$

ということである。

命題

$\langle \boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n \rangle$ は V^* の基底である。これを $\langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ の**双対基底（dual basis)** と呼ぶ。

（注意） 一般的には $\boldsymbol{f}_i$ のことを $\boldsymbol{e}_i^*$ と表記する。つまり、

$$\boldsymbol{e}_i^*(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_i$$

ということである。

（命題の証明）

任意の $f \in V^*$ が $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ の線形結合で表わせることをまず示す。$y_1 := f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, y_n := f(\boldsymbol{e}_n)$ とおこう。すると、

$$\begin{aligned} f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) &= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \\ &= y_1\boldsymbol{f}_1(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + y_n\boldsymbol{f}_n(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= (y_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{f}_n)(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \end{aligned}$$

したがって、

$$f = y_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + y_n \boldsymbol{f}_n$$

であって、任意の $f \in V^*$ は $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ の線形結合で表わせる。次に $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ が線形独立であることを示す。$y_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + y_n \boldsymbol{f}_n = 0$ であるとする。つまり、任意の $\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n$ に対して、

$$(y_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + y_n \boldsymbol{f}_n)(x_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n)$$

であるとする。上の計算により、これは任意の任意の $\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n$ に対して、

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = 0$$

であることを意味している。したがって、$y_1 = \cdots = y_n = 0$ である。このことより、 $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n$ は線形独立である。（命題の証明終わり）

定義

$f : V \to W$ に対して、$f^* : W^* \to V^*$ を次によって定義し、これを f の**双対写像 (dual linear map)** と呼ぶ。

$$g \in W^* \text{ に対して、} (f^* g)(\boldsymbol{x}) := g(f(\boldsymbol{x}))$$

命題

V の基底を E,V^* の双対基底を E^*、W の基底を F,W^* の双対基底を F^*、とする。E, F に関する写像 $f : V \to W$ の行列表現を A とすると、F^*, E^* に関する f^* の行列表現は ${}^t A$ である。

（命題の証明） $A = (a_{ij})_{(i,j)}$ とする。

$$f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = y_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{f}_m$$

であるとすると、行列表現の定義により、

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

である。つまり、

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

である。さて、W^* の任意の元 $u_1\boldsymbol{f}_1^* + \cdots + u_m\boldsymbol{f}_m^*$ に f^* を施してみよう。
$j = 1, 2, \cdots, n$ に対して、

$$\begin{aligned}
&f^*(u_1\boldsymbol{f}_1^* + \cdots + u_m\boldsymbol{f}_m^*)(\boldsymbol{e}_j) \\
&= (u_1\boldsymbol{f}_1^* + \cdots + u_m\boldsymbol{f}_m^*)(f(\boldsymbol{e}_j)) \\
&= (u_1\boldsymbol{f}_1^* + \cdots + u_m\boldsymbol{f}_m^*)(a_{1j}\boldsymbol{f}_1 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{f}_m) \\
&= u_1a_{1j} + \cdots + u_ma_{mj}
\end{aligned}$$

したがって、

$$f^*(u_1\boldsymbol{f}_1^* + \cdots + u_m\boldsymbol{f}_m^*) = \sum_{j=1}^{m}(u_1a_{1j} + \cdots + u_ma_{mj})\boldsymbol{e}_j^*$$

であることがわかる。ここで、$v_j = u_1a_{1j} + \cdots + u_ma_{mj}$ とおけば、

$${}^tA\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

となり、f^* の行列表現が ${}^tA$ であることが示された。（命題証明終わり）

命題

$\mu : V \to (V^*)^*$ を次で定めると、μ は線形空間の同型を与える。$\boldsymbol{x} \in V$ に対して、$\mu(\boldsymbol{x})$ を $\mu_{\boldsymbol{x}}$ と書くことにして、$\mu_{\boldsymbol{x}} : V^* \to \boldsymbol{R}$ を

$$\mu_{\boldsymbol{x}}(f) := f(\boldsymbol{x}) \qquad (f \in V^*)$$

により与える。

（命題の証明）

・μ が線形写像である証明

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対して、

$$\mu_{a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}}(f) = f(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = af(\boldsymbol{x}) + bf(\boldsymbol{y}) = a\mu_{\boldsymbol{x}}(f) + b\mu_{\boldsymbol{y}}(f)$$

である。

・μ が全射である証明

$\eta \in (V^*)^*$ を任意に取る。$\eta : V^* \to \boldsymbol{R}$ である。このとき、V^* の基底 $\langle \boldsymbol{e}_1^*, \cdots, \boldsymbol{e}_n^* \rangle$ に対して、$v_1 := \eta(\boldsymbol{e}_1^*)$, $\cdots$, $v_n := \eta(\boldsymbol{e}_n^*)$ とする。このとき、$\boldsymbol{x} := v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$ に対して、$\mu_{\boldsymbol{x}}$ を考える。

$$\mu_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{e}^*) = \boldsymbol{e}^*(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^*(v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n) = v_i$$

であり、$\eta = \mu_{\boldsymbol{x}}$ であることが示された。η は任意だったから、全射が示された。

・μ が単射である証明

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が $\mu_{\boldsymbol{x}} = \mu_{\boldsymbol{y}}$ を満たすと仮定しよう。つまり、$i = 1, 2, \cdots, n$ について、$\mu_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{e}_i^*) = \mu_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{e}_i^*)$ が成り立つ。したがって

$$\boldsymbol{e}_i^*(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}_i^*(\boldsymbol{y})$$

を得る。$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{y} = b_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n$ とおくと、

$$a_i = \boldsymbol{e}_i^*(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}_i^*(\boldsymbol{y}) = b_i$$

となり、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が示される。したがって、μ は単射である。（証明終わり）

１２章練習問題

(12-1) 次の集合のうち、$\mathbf{R}^3$ の部分線形空間であるのはどれか。

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x+y+z=1 \right\}$

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x^2+y^2+z^2=1 \right\}$

(3) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x=y=z=0 \right\}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ としたときに、$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{o} \right\}$

(12-2) （標準）$V = \{n \times n$ の実正方行列 $\}$ とする。次のそれぞれの場合について、集合 W は V の線形部分空間であるか。

(1) $W = \{A \in V \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$

(2) $W = \{A \in V \mid \det(A) = 0\}$

(3) $W = \{A = (a_{ij})_{(i,j)} \in V \mid \Sigma_i \Sigma_j a_{ij} = 0\}$

(4) $X \in V$ を１つ固定する。 $W = \{A \in V \mid AX = O\}$

(12-3) （標準)$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ は連続関数 $\}$ とする。以下の集合 W は V の線形部分集合であるか。

(1) $W = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$

(2) $W = \{f \in V \mid$ ある定数 M が存在して $|f(x)| < M\}$

(3) $W = \{f \in V \mid f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$

(4) $W = \{f \in V \mid \int_0^1 f(t)dt < 1\}$

(12-4) (標準)

$$W = \left\{ (a,b,c,d,e,f,g,h) \in \mathbb{R}^8 \;\middle|\; \begin{array}{l} -a+b+c-d=0 \\ a-b-e-h=0 \\ -c+d-f-g=0 \\ e+f+g+h=0 \end{array} \right\}$$

の基底の例と次元を求めよ。

(12-5) (標準)

$$W_1 = \mathrm{span}\left(\left(1,-1,1,1,-1,1\right), \left(0,0,0,-1,1,-1\right), \left(1,0,0,1,0,-1\right)\right)$$

$$W_2 = \left\{ (a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; \begin{array}{l} a+b+f=0 \\ -a+c+d=0 \\ -b-c+e=0 \\ -d-e-f=0 \end{array} \right\}$$

とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) $W_1 \cap W_2$ を求めよ。また、基底の例を挙げよ。

(2) $W_1 + W_2$ の基底の例を挙げよ。

(12-6) (標準) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ とする。

以下の問いに答えよ。

(1) $W_1 = \mathrm{span}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), W_2 = \mathrm{span}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ とするとき、$W_1 \cap W_2$ を求めよ。また、基底の例を挙げよ。

(2) $W_1 + W_2$ の基底の例を挙げよ。

(12-7) (標準) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ を行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -7 \end{pmatrix}$ で定めたとする。以下の問いに答えよ。

(1) f の核 $\ker(f)$ の基底の例を挙げ，次元を求めよ。

(2) f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底の例を挙げ，次元を求めよ。

(12-8) （標準） $\mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ の基底の例を挙げ，次元を求めよ。

(12-9) （標準） $\mathbb{R}_3[x] = \{3$ 次以下の x を変数とする実係数の多項式 $\}$ とする。$F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ を以下で定めるものとする。

$f \in \mathbb{R}_3[x]$ に対して $F(f) = (f(x) \times (x+1)$ を (x^4-1) で割った余り$)$

(1) 基底 $\langle 1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3 \rangle$ に関して、F の表現する行列を求めよ。

(2) F の核 $\ker(F)$ の基底の例を挙げ、次元を求めよ。

(3) F の像 $\mathrm{Im}(F)$ の基底の例を挙げ、次元を求めよ。

(12-10) （やや難)

$$C^\infty(S^1) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} f \text{ は無限回微分可能} \\ f(x+1) = f(x) \text{ を満たす} \end{array} \}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $f \in C^\infty(S^1)$ に対して、$f' \in C^\infty(S^1)$ を示せ。ただし f' は f の微分とする。

(2) 「微分をする」という写像 $D : C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1) : D(f) = f'$ を考えるとき、この核 $\ker(D)$ を求めよ。

(3) $C^\infty(S^1)/\mathrm{Im}(D)$ を求めよ。つまり、$C^\infty(S^1)$ の 2 要素 f, g に対して

$$f \sim g \Longleftrightarrow f - g \in \mathrm{Im}(D)$$

で同値関係を定義したときの商集合を求めよ。

(12-11) (標準)$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$ とするとき、$\mathbb{R}^3 = W_1 \dot{+} W_2$ となるための定数 a の条件を求めよ。