１１　基底

１１－１　線形従属、線形独立

線形空間 V の要素（ベクトル）を n 個選んできたとする。それを $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ であるとしよう。適当な実数 $a_1, \cdots, a_n$ に対して、

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

は（線形空間の定義により）再び V の要素である。これを $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の**線形結合**と呼ぶ。

もし、この線形結合が 0 ベクトルになる場合、つまり、

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$$

になるのは特別な場合であって、これを $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の**線形関係 (linear relation)** と呼ぶ。といっても、スカラーが $a_1 = \cdots = a_n = 0$ を満たすときにはいつでも線形関係はあることになる。これは明らかな場合なので、**自明な線形関係 (trivial linear relation)** という。

$a_1 = \cdots = a_n = 0$ **以外**の場合で線形関係が満たされることもありうる。それを**線形従属 (linearly dependent)** という。つまり、$a_1, \cdots, a_n$ のどれかは 0 でなく、

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$$

が成り立つ場合には、これは線形従属である。

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が線形従属でなときを**線形独立 (linearly independent)** という。言い換えると、

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o} \quad \text{ならば} \quad a_1 = \cdots = a_n = 0$$

が成り立てば、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は線形独立であるという。

（参考）線形従属、線形独立のことをそれぞれ一次独立、一次従属と呼ぶこともある。（どちらも頻繁に用いられる。）

（例 1） 座標空間 $\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$ において、$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$ $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$ は線形独立である。

（例 2） 2 本のベクトルが線形従属であるとは、2 本が平行であることを意味する。逆に、2 本のベクトルが線形独立であるとは、2 本が平行でないことを意味する。

（例 3） 3 本の平面ベクトルは、必ず一次従属になる。

（例 4） 3 本の空間ベクトルが同一平面に含まれる場合は、これらは線形従属である。3 本の空間ベクトルが同一平面に含まれない場合、これらは線形独立である。

命題

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が線形従属であることと、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のうちのひとつがほかの $n-1$ 個のベクトルの線形結合で書き表されていることとは必要十分条件である。

（証明）　$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が線形従属であるならば、$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$ かつ $a_1, \cdots, a_n$ のどれかは 0 でない。たとえば $a_1 \neq 0$ であったと仮定しよう。（ほかのどれでも同じことである。）このとき、

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{1}{a_1}(a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n)$$

となり、題意は満たされる。逆に、$\boldsymbol{v}_1$ が $\boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の線形着都合で表せるならば、つまり、$\boldsymbol{v}_1 = a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$ ならば、

$$-\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$$

となり、線形従属であることがわかる。（証明終わり）

命題

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が線形独立であり、かつベクトル $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合で表されないならば、$n+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}$ は線形独立である。

（証明）　背理法を用いる。$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}$ が線形従属であると仮定する。すると、ある（すべてが 0 ではない）実数 $a_1, \cdots, a_n, a$ が存在して、

$$-\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n + a\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$$

である。

もし、$a = 0$ だとすると、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が線形独立であるという仮定に矛盾してしまう。もし $a \neq 0$ だとすると、$\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合で表されないという仮定に矛盾してしまう。いずれにしても矛盾が起きてしまう。これは $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}$ が線形従属であると仮定したためである。したがって $n+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}$ は線形独立である。（証明終わり）

定義

線形空間 V に有限個のベクトルが存在して、V の任意のベクトルがこれら有限個のベクトルの線形結合として表されるとき、V は**有限次元 (finite dimension)** であるという。そうでないときには**無限次元**であるという。

（注意） 0 ベクトル $\boldsymbol{o}$ のみからなる線形空間 $\{\boldsymbol{o}\}$ は有限次元であると考える。

11-2 基底・次元

この節では、線形空間 V は有限次元であると仮定する。

定義 (基底)
線形空間 V に含まれるベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が、次の 2 つの条件を満たすとき、これを V の**基底 (basis)** という。
(1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は線形独立
(2) V の任意の要素は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の線形結合として表される。

記号
$V = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$

（注意）　基底を表現するときに、そのベクトルの順番は関係がないように思えるが、基底を表記するときには、そのベクトルの順番も問題にする。順番が異なれば、異なる基底であるとみなす。
（注意）$V = \{\boldsymbol{o}\}$ のときには、基底は存在しない。

（基底の感覚的捕らえ方）　$V = \boldsymbol{R}^n$ だとする。任意の正則行列（＝行列式が 0 でない行列）A を列ベクトルを使って

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \, \boldsymbol{a}_2 \, \cdots \, \boldsymbol{a}_n)$$

と書き表したとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は基底である。また、基底を列ベクトルで書き表し、上のように横に並べれば、それは正則行列になる。正則行列と基底は一対一に対応する。

（注意）V の任意の要素は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の線形結合として表されるが、そのあらわし方はただ一通りである。実際に、もし二通りあったとすると、

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n = b_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n$$

であるが、右側の等号より

$$(a_1 - b_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (a_n - b_n)\boldsymbol{e}_n = 0$$

であって、線形独立性より $a_1 - b_1 = \cdots = a_n - b_n = 0$ となり、結局、表し方が一通りであることが示される。

定理

$V \neq \{\boldsymbol{o}\}$ であるとする。任意に与えられた線形独立なベクトルについて、それが基底でないならば、それにいくつかのベクトルを追加して基底にすることができる。

定理の別表現

$V \neq \{\boldsymbol{o}\}$ であるとする。ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ が線形独立で、かつ基底でないとする。このとき、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ を含むような基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ $(r < n)$ が存在する。

（定理の証明）　V は有限次元であることを仮定しているので、有限個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が存在して、V の任意の要素は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表される。$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ は基底でないから、$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の中に $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ の線形和で書き表せないものが存在する。

（もしすべての $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ の線形和で

$$\boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{r} b_{ji} \boldsymbol{e}_i$$

と書けていたと仮定する。V の任意の要素は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表されることを仮定していたから、V の任意の要素 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{a}_j$$

とあらわせる。上式を下式に代入して

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{r} (\sum_{j=1}^{m} b_{ji}) \boldsymbol{e}_i$$

を得るので、ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ が基底でないという仮定に矛盾する。したがって $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の中に $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ の線形和で書き表せないものが存在する。）

今たとえば $\boldsymbol{a}_1$ がそうであったとしよう。（これはどれがそうであったと仮定しても議論が変わることがないので、こうしてよい。）そこで $\boldsymbol{e}_{r+1} := \boldsymbol{a}_1$ であるとしよう。

これを同じ議論を繰り返そう。新たに得られた $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{r+1}$ が基底ならば、それで定理は示されたことになる。もし基底でないならば、同じ議論を繰り返して、$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の中から $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ の線形和で書き表せないものを選び、それを追加する。この作業はどんなに繰り返しても m 回を超えることはありえないので、有限手数で終了する。こうして V の基底が得られる。（証明終わり）

命題

$\boldsymbol{R}^n$ において、n 個より多くのベクトルは線形従属である。したがって、$\boldsymbol{R}^n$ と $\boldsymbol{R}^m$ とが同型であるならば $n=m$ である。

（命題の証明）　$m>n$ であると仮定して矛盾を導こう。$\boldsymbol{o}$ でない $\boldsymbol{R}^n$ の列ベクトルを m 個用意する。それを $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ であるとする。これを横に並べた $n\times m$ 行列を $A=(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_m)$ とすると、m 個の未知数に関する１次方程式

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}\qquad \left(\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right)$$

は必ず自明でない解をもつ。（A が横長の行列であることから、その標準形の右側に必ず余る部分が出てくるので。）このことは $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ が線形従属であることを意味している。もし $\boldsymbol{R}^n$ と $\boldsymbol{R}^m$ とが同型であるならば、$\boldsymbol{R}^n$ の中に m 個からなる基底が存在しなければいけない。（同型であるならば全単射であるから。）このことは矛盾である。したがって、$\boldsymbol{R}^n$ と $\boldsymbol{R}^m$ とが同型であるならば、$n=m$ である。（証明終わり）

命題

線形空間 V が n 個からなる基底を持つならば、$m>n$ なる任意の m について、m 個からなるベクトルは必ず線形従属である。特に、V の任意の基底は必ず n 個のベクトルより構成される。

（命題の証明）　$V=\langle \boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\rangle$ とすると、写像 $f:V\to\boldsymbol{R}^n$,$g:\boldsymbol{R}^n\to V$ を

$$f(x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n):=(x_1,\cdots,x_n)$$

$$g(x_1, \cdots, x_n) := x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

により定義すると、f, g は互いに逆写像であり、V と $\boldsymbol{R}^n$ とは同型であることがわかる。前の命題で述べたように、$\boldsymbol{R}^n$ においては $m > n$ となる m においては m 個のベクトルは線形従属であった。写像 f を介することにより、同じ命題が V についても成立することがわかる。（証明終わり）

定義

線形空間 V が n 個のベクトルから構成される基底を持つとき、V の**次元 (dimension)** は n であるという。

（記号） $\mathrm{dim} V = n$

11-3 基底の取替え写像

ひとつの線形空間 V に 2 種類の基底があったとする。その基底同士の関係を記述する方法について論じる。

$E = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$, $F = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n \rangle$ を線形空間 V の基底であるとする。$\boldsymbol{f}$ は V の要素であるから、

$$\boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} \boldsymbol{e}_j$$

と書き表すことができる。(p_{ji} の添え字がフツウの感覚とは逆になっていることに注意しよう。それは後での都合である。）このとき、行列

$$P = (p_{ij})_{(i,j)}$$

を基底 E から基底 F への（基底の）取替え写像であるという。簡単に「$E \to F$ の取替え写像」と書くこともある。（ただし、一般的な記号ではない。）

線形空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、二つの基底 E, F でそれぞれ書き表すことができる。つまり、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = &\quad x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots x_n\boldsymbol{e}_n \\ = &\quad x'_1\boldsymbol{f}_1 + x'_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots x'_n\boldsymbol{f}_n \end{aligned}$$

のようにである。これを、列ベクトル $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ への変換であると考えると、その変換はどのように記述されるか。

上式の $\boldsymbol{f}_i$ に $\boldsymbol{e}_j$ の式を代入すると、

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{e}_j &= \textstyle\sum_{i=1}^n x'_i \boldsymbol{f}_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x'_i p_{ji} \boldsymbol{e}_j\end{aligned}$$

同一の基底による書き表し方は一通りしかないので、

$$x_j = \sum_{i=1}^n p_{ji} x'_i$$

したがって、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

とあらわされる。ここに現れる行列が P である。

（注意）　E から F の、といっているのに、行列 P が $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ への変換だ、というのは順序が逆ではないのか、という質問をよく受けるのだが、定義からしてこの順である、としか言いようがない。

具体的に与えられた二つの基底 E, F に対して、P の求め方を考えよう。ひとつの方法は、定義に基づいて

$$\boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^n p_{ji} \boldsymbol{e}_j$$

となるような p_{ji} を求めることである。取替え行列を作るときの添え字を間違えないように！

実質的に同じことであるが、$V = \boldsymbol{R}^n$ である場合には別法もある。$E = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$, $F = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n \rangle$ に対して、行列 A, B を

$$A = (\boldsymbol{e}_1\, \boldsymbol{e}_2\, \cdots\, \boldsymbol{e}_n), B = (\boldsymbol{f}_1\, \boldsymbol{f}_2\, \cdots\, \boldsymbol{f}_n)$$

と書き表したときに、$B = AP$ であるから、

$$P = A^{-1}B$$

である。

（注意）　$E \to F$ の取替え写像が行列 P ならば、$F \to E$ の取替え写像は行列 P^{-1} によって与えられる。

（注意）　$E \to F$ の取替え写像が行列 P、$F \to G$ の取替え写像が行列 Q ならば、$E \to G$ の取替え写像は行列 PQ である。これは定義に戻って記述してみれば確認できる。（もしかしたら、直感的には QP であると思うかもしれないが、P が $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ への変換だということを思い出せば、割と納得がいくのではないだろうか。）

11-4 線形写像の基底による表示

写像 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ が線形写像であるとは、$m \times n$ 行列で表わせるような写像のことであった。一方で、線形空間 V, W の間の写像 $f : V \to W$ が線形写像であるとは、

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \qquad f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$$

が満たされることであった。この二つの事柄を結びつける「線形写像の基底に関する行列表示」について説明しよう。

V, W の基底 $E : \langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle, F : \langle \boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_m \rangle$ を固定して考える。

$\varphi : V \to \boldsymbol{R}^n$ を $\varphi(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\psi : W \to \boldsymbol{R}^m$ を $\psi(y_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{f}_m) := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

と定義しよう。φ と ψ は同型写像（特に全単射）であることに注意しておこう。

$f : V \to W$ と φ と ψ を組み合わせてみよう。ただしここで、φ^{-1} を φ の逆写像として、これを用いる。

$$F : \boldsymbol{R}^n \xrightarrow{\varphi^{-1}} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\psi} \boldsymbol{R}^m$$

という合成写像を考えよう。φ, f, ψ はどれも線形写像なので、その合成写像

$F := \phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ も線形写像である。しかも F は $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への線形写像だからこれは行列で書き表すことができる。実際に、

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, F\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

とおけば、任意の $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ。ここに現れる行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を「基底 E, F に関する（線形写像）f の行列表示」という。

行列表示 A の定義の仕方より次の公式を導くことができる。

$$f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = y_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{f}_m$$

であったとしよう。このとき、

$$\psi \circ f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

となり、$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = A$ であったから、

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

が得られる。

次に、V の基底を E から E' へ、W の基底を F から F' へと取り替えたとする。このときの線形写像 f を表わす行列の変化について調べてみよう。

（命題）

E, F に関する f の行列表示を A とする。$E \to E'$, $F \to F'$ の基底の取替え行列をそれぞれ P, Q であるとすると、E', F' に関する f の行列表示 B は

$$B = Q^{-1}AP$$

によって得られる。

（命題の証明）V の元 $\boldsymbol{x}$ が基底 E, E' によって座標 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ のように書き表されていれば、

$$P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

であった。同様に、W の元 $\boldsymbol{y}$ が基底 E, E' によって座標 $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}$ のように書き表されていれば、

$$Q \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

である。Q は正則行列（同型写像）であるから、

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

である。E, F に関する f の行列表示を A としたから

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

である。(1)(2)(3) をあわせると

$$Q^{-1}AP\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}$$

を得る。この式は $B = Q^{-1}AP$ であることを意味している。（証明終わり）

１１章練習問題

(11-1)（基本）以下のベクトルの組が線形独立であるかどうかを判定せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(11-2)（標準）

(1) ４つの $\boldsymbol{o}$ でない空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ があり、$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c} + z\boldsymbol{d}$ と表わせているとする。「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ のどの３本も同一平面上にない」の必要十分条件を x, y, z に関する式で表わせ。

(2)（１）の条件を満たすとき、ある p, q, r が存在して、$\boldsymbol{a}, p\boldsymbol{b}, q\boldsymbol{c}, r\boldsymbol{d}$ が平行四辺形の４頂点にできることを示せ。

(11-3)（標準）　$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ が線形従属になるような実数 a, b を求め、$\boldsymbol{v}_3$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の線形結合で表わせ。

(11-4)　(標準)　$\mathbb{R}[x]_3 = \{$ 3次以下の実係数多項式 $\}$ とする。

(1) $\mathbb{R}[x]_3 = \langle 1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3 \rangle$ を示せ。

(2) $\mathbb{R}[x]_3 = \langle x^3, x^3+x^2, x^3+x^2+x, x^3+x^2+x+1 \rangle$ を示せ。

(3) $\mathbb{R}[x]_3 = \langle 1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3 \rangle$ を示せ。

(4) 基底（1）から基底（2）への変換行列を求めよ。

(5) 基底（2）から基底（3）への変換行列を求めよ。

(11-5)　(標準)　実数上の関数において、以下の関数がそれぞれ線形独立であることを示せ。

(1) $\sin x, \cos x$

(2) $\sin x, \sin(2x), \sin(3x)$

(3) e^x, e^{2x}, e^{3x}

(11-6)　(基本)　$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ とし、

$$V = \{a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 20 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}$ が V に含まれることを示せ。

(2) $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ が V の基底であることを示せ。（基底の定義から、確認すべきことをすべて確かめよ。）

(3) $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ は V の基底である。（このことは証明不要である。）$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ から $\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \rangle$ への基底の取替行列を求めよ。

(11-7) （標準) x, y, z を変数とする実係数の多項式 $f(x, y, z)$ が**同次 n 次対称式**であるとは、以下の二つの条件を満たすことであるとする。

(a) 任意の実数 k に対して、$f(kx, ky, kz) = k^n f(x, y, z)$ である。

(b) 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ について $f(a, b, c) = f(b, a, c) = f(a, c, b)$ が成り立つ。

$S_n[x, y, z] := \{$ 同次 n 次対称式 $\}$ と定義するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 同次 n 次対称式 $f(x, y, z)$ と任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して、$f(a, b, c) = f(c, a, b)$ を示せ。

(2) $S_n[x, y, z]$ は多項式の和について、また実数定数倍について閉じていることを示せ。

(3) $S_1[x, y, z]$ の任意の要素は $k(x + y + z)$ $(k \in \mathbb{R})$ という形で書き表せることを示せ。このことから $S_1[x, y, z] = \langle x + y + z \rangle$ である。

(4) $S_2[x, y, z] = \langle x^2 + y^2 + z^2, xy + yz + zx \rangle$ を示せ。

(5) $S_{10}[x, y, z]$ の（線形空間としての）次元を求めよ。（理由も述べること。）

(参考) $S_n[x,y,z]$ の次元を a_n としたときに、a_n を求めることができるだろうか。a_n が満たす漸化式を探したり、$\Sigma a_n x^n$ を求めたりしてみよ。

(11-8) （先題から復活）（やや難）x, y, z を変数とする実係数の多項式 $f(x,y,z)$ が V に含まれるとは、以下の二つの条件を満たすことであるとする。

(a) ある実数 k が存在して、$f(x,x,x) = kx$ である。

(b) 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ について $f(a,b,c) = f(b,a,c) = f(a,c,b)$ が成り立つ。

V が無限次元の線形空間であることを示せ。

(11-9) （標準）$\mathbb{R}[x]_3 = \{\ 3$ 次以下の実係数多項式 $\}$ とする。写像 $D : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ を微分によって定めるものとする。このとき、基底 $\mathbb{R}[x]_3 = \langle 1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3 \rangle$ に関する写像 D の行列表示を求めよ。

(11-10) （標準）$V = \langle e^x, xe^x, x^2e^x, x^3e^x \rangle$ とする。写像 $D : V \to V$ を微分によって定めるものとする。このとき写像 D の行列表示を求めよ。

(11-11) （標準）$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が線形独立ならば、$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}, -\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}$ も線形独立であることを示せ。

(11-12) （やや難）$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が $\mathbf{R}^n$ の基底とする。このとき、$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ であって、

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすようなベクトルが存在することを示せ。そして、$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ も $\mathbf{R}^n$ の基底であることを示せ。