14　固有値と固有ベクトル

14-1 固有値と固有ベクトル

定義

V を実線形空間（または複素線形空間）とする。$f : V \to V$ を線形写像であるとする。$\boldsymbol{o}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ と実数（または複素数）α に対して、

$$f(\boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{v}$$

が満たされるとき、α を f の**固有値 (eigenvalue)** 、$\boldsymbol{v}$ を（固有値 α に関する）**固有ベクトル (eigenvector)** であるという。また、f の固有値 α に対して、

$$W_\alpha := \{\boldsymbol{v} \mid f(\boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{v}\}$$

を（固有値 α に関する）**固有空間 (eigenspace)** という。

注意: 一般的に、$\boldsymbol{o}$ は固有ベクトルであるとは言わない。

注意: 固有空間は線形部分空間である。

注意: 線形写像 f のかわりに、行列 A に対しても、同じように固有値、固有ベクトル、固有空間という用語を用いるが意味は同じである。そのときには満たすべき式は

$$A\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{v}$$

となる。ただし、A が**実行列であっても、固有値・固有ベクトルを複素数の範囲で求める**のが普通である。

注意: $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ または $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ の場合には、$\boldsymbol{v}$ は固有値 0 に関する固有ベクトルであると解釈する。

14-2 固有ベクトルの線形独立性

命題

行列 A の固有値 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ が互いに異なり、α_i に関する固有ベクトルをひとつ選んでそれを $\boldsymbol{v}_i$ であるとする。($i = 1, \cdots, r$) このとき、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は線形独立である。

命題の証明: 背理法を用いる。$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ のうち最初の $i-1$ 個 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}$ が線形独立で、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_i$ が線形従属であると仮定して矛盾を導く。したがって、

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_i\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{o} \tag{1}$$

となるような $a_1, \cdots, a_i$ で、どれかひとつは 0 でないようなものが存在する。この式の両辺に A をかけると、

$$A(a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_i\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{o}$$

$\boldsymbol{v}_1, \cdots$ は固有ベクトルであるから、

$$a_1\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_i\alpha_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{o} \tag{2}$$

である。(1)$\times\alpha_i-$(2) を計算すると

$$a_1(\alpha_i - \alpha_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{i-1}(\alpha_i - \alpha_{i-1})\boldsymbol{v}_{i-1} = \boldsymbol{o}$$

となる。$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i-1}$ が線形独立であることから

$$a_1(\alpha_i - \alpha_1) = \cdots = a_{i-1}(\alpha_i - \alpha_{i-1}) = 0$$

今、$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ が互いに異なることより、

$$a_1 = \cdots = a_{i-1} = 0$$

である。この式を (1) に代入すると、$a_i = 0$ を得る。しかし、$a_1, \cdots, a_i$ でどれかひとつは 0 でないと言っていたので、これは矛盾である。（証明終わり）

14-3 特性方程式と固有値

行列 A に対して、**特性多項式** $\Phi_A(x)$ を

$$\Phi_A(x) := \det(xE - A)$$

により定義する。x に関する方程式 $\Phi_A(x) = 0$ を行列 A の**特性方程式 (characteristic equation)** という。

命題

特性方程式の解は固有値である。

命題の証明: α を特性方程式 $\Phi_A(x) = 0$ の解であるとする。すると $\det(\alpha E - A) = 0$ であるから、$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を変数とするような

$$(\alpha E - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$$

という連立一次方程式は、非自明な（$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ であるような）解をもつ。すると、

$$\begin{aligned}
&(\alpha E - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \\
&\Rightarrow \alpha E\boldsymbol{v} - A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \\
&\Rightarrow A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

となり、α は固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ をもつ固有値であることが示される。（証明終わり）

注意: 固有ベクトルは一通りには決まらない。定数倍の自由度を持っている。$\boldsymbol{o}$ でないものを選べばそれでよいのである。

注意:　一般の線形写像の場合には、一度基底を固定してから、その行列表示を行って、固有値や固有ベクトルを計算すればよい。

注意:　上の注意で、線形写像の固有値を求めるときに、基底の取り方を変更すると固有値も変わるような気がするが、実際には特性方程式は基底の取り方によらず一定であることが示される。

注意:　A が n 次正方行列ならば、$\Phi_A(x) = 0$ は n 次方程式である。代数学の基本定理により、n 次方程式は複素集の範囲に（重複もこめて）n 個の解を持つことが知られている。

定理

A を n 次正方行列とする。$\Phi_A(x) = 0$ の解 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が互いにすべて異なる（重解を持たない）とする。固有ベクトルを順に $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ であるとする。このとき、固有ベクトルを横に並べた行列を $P = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)$ とすると、P は正則行列であって、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ。この式を、行列 A の対角化という。

定理の証明:　14-2 節により、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は線形独立である。このことから、行列 P の階数 (rank) は n に等しく、したがって P は正則行列であることが示される。

$$
\begin{aligned}
AP &= A(\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n) \\
&= (A\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ A\boldsymbol{v}_n) \\
&= (\alpha_1\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \alpha_n\boldsymbol{v}_n) \\
&= (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \\
&= P\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}
$$

を得る。

注意:　この定理を用いれば、P さえもとまれば、対角化が得られることがわかるので、改めて検算することは不要であろう。（一度は検算してみて、そのありがたみを感じておくのも良いかもしれないが。）

定義（対角化可能）
正方行列 A に対して、ある正則行列 P が存在して、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

の形に書き表せるとき、A は**対角化可能な (diagonalizable)** 行列であるといい、P を変換行列であるという。

（まとめ）　特性方程式 $\Phi_A(x) = 0$ が重解を持たないならば、A は対角化可能である。変換行列は固有ベクトルを並べたものである。

注意:　特性方程式が重解を持つ場合には、対角化可能であるとは限らない。ただし、重解の重複度と同じ個数だけの線形独立な固有ベクトルがあるならば、上の定理を同じ原理で対角化可能である。

注意:　対角化可能でない行列の例
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ であるとする。この特性方程式は $\Phi_A(x) = (x-2)^2 = 0$ で

あって、その解は $x=2$（重解）である。固有ベクトルを求めると、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 2x \\ 2y = 2y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のひとつだけである。よって、重解の重複度と固有ベクトルの個数が一致せず、この場合には対角化できない。

　この場合には、対角化はできないが、ジョルダン標準形と呼ばれる形に変形することはできる。そのことはジョルダン標準形の節で述べる。ちなみにこの例の場合、この行列 A 自身がジョルダン標準形の一例であるので、当然対角化できないのである。