13 内積・計量

13-1　計量線形空間

計量とは …

通常の座標空間には「内積 (inner product)」があった。一般の線形空間においても内積を考えたいが、どのようなものを「内積」と呼べばよいかがはっきりしない。基底をひとつ決めて、座標空間の内積を持ち込んでももちろんよさそうだ。しかし基底を取り替えたらそれも内積と呼んでよいのだろうか？ここでは、より一般的な立場から、内積を一般化した「計量 (metric)」というものを定義し、計量を持つ線形空間の計量線形空間と呼ぶことにする。

定義　（計量線形空間（実線形空間））

実数上の線形空間 V が計量の公理 (M1)〜(M5) を満たすとき、V は**計量線形空間 (metric linear space)** であるという。

(M1) V の 2 元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して、計量 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ が定義される。

(M2) $$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) \\ (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})\end{aligned}$$

(M3) $c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y})$

(M4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

(M5) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ かつ、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$

定義 (計量線形空間（複素線形空間）)

複素数上の線形空間 V が次の計量の公理 (M1)〜(M5) を満たすとき、V は**複素計量線形空間（または複素計量空間）(complex metric linear space)** であるという。

(M1) V の 2 元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して、計量 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{C}$ が定義される。（計量は内積とも呼ばれる。）

(M2) $$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$$ $$(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$$

(M3) $c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \bar{c}\boldsymbol{y})$

(M4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$

(M5) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ かつ、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$

注意: 通常の座標平面、座標空間における内積は、計量の公理を満たす。より一般に、正値対称行列 A に対して、

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_A := {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{y}$$

は計量を与えることが知られている。（「正値」とは固有値がすべて正の実数であるような行列のことである。）このことから、線形空間の計量の種類は無数にあることがわかる。

注意 複素計量空間では定数倍 (M3) と、対称性 (M4) のところに複素共役が現れる。実際に、複素座標空間における内積は

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

によって定義される。この計量を特に「エルミート内積 (Hermite inner product)」と呼ぶ。複素数座標空間における内積に複素共役が現れる理由は、計量の公理 (M5) を満たす要請があるためである。実際に、この内積で (M5) が満たされることを確認せよ。（練習問題を参照のこと。）複素軽量空間の計量は、第 2 変数に関して線形写像ではないことにも注意しよう。

定義 (長さ (ノルム)、直交)
ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ を（この計量に関する）**長さ（ノルム） (norm)** といって $||\boldsymbol{x}||$ で書き表す。また、二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ を満たすとき、この二つのベクトルのこの計量に関して**直交 (perpendicular) している**という。

注意　実ベクトル、複素ベクトルのどちらの場合にも、ノルムは直感的な長さと一致するだろう。確認してみよ。（練習問題を参照のこと。) 複素ベクトルの場合、「内積＝０」に対する「直交」のイメージは皆無である。実数ベクトルの場合の連想と考えるほうが無難だろう。

注意　V が計量空間であるならば、V の線形部分空間も同じ計量について計量空間である。

13-2 計量に関する性質

命題

(1) $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq ||\boldsymbol{x}||\,||\boldsymbol{y}||$（シュヴァルツの不等式）

(2) $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$（三角不等式）

以上二つの命題の証明は、座標空間 $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ の内積についての証明とまったく同様であるので、ここでは省略する。（別の言い方をすれば、前の章でこれらの不等式を証明したときに、計量としての性質しか用いずに証明していたことになる。）

命題

$\boldsymbol{o}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が互いに直交するならば、それらは線形独立である。

命題の証明:　線形関係 $a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}$ が成り立つとする。この両辺と $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ との内積を取ると、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{x}_i) &= (a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_i) \\ &= a_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_i) + a_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_i) + \cdots + a_n(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_i) \\ &= a_i||\boldsymbol{x}_i||^2\end{aligned}$$

この両辺は 0 であるから、$a_i = 0$ を得る。このことはすべての $i = 1, 2, \cdots, n$ についていえるから、ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は線形独立である。（証明終わり）

13-3　正規直交系

定義
計量線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が

（1） 互いに直交していて、かつ

（2） すべてのベクトルのノルムが 1 に等しい

であるとき、これを**正規直交系 (orthonormal system)** であるという。これらが基底をなすときは、**正規直交基底 (orthonormal basis)** であるという。

注意　正規直交系はあくまで内積によって決まる概念であるから、同じ線形空間でも異なる内積を考えているときには正規直交系も異なると考えなければいけない。

（注意）「直交系 (orthogonal system)、直交基底 (orthogonal basis と)」いうと、直交は仮定するが、長さが 1 であることは仮定しないようなもののことをさす。

13-4 シュミットの直交化

線形独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ があるとき、これから正規直交系 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を得ることができる。これを**シュミットの**（グラム=シュミットの、ということもある）**直交化**という。しかも

$$\mathrm{span}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \mathrm{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$$

である。したがって、基底をひとつ与えれば、シュミットの直交化によって、正規直交基底が得られることがわかる。

定義（シュミットの直交化の手順）

（第１手順） $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{x}_1$ とし、

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||}$$

とする。

（第２手順） $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$ とし、

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2}{||\boldsymbol{a}_2||}$$

とする。

（第３手順） $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{x}_3 - (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$ とし、

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_3}{||\boldsymbol{a}_3||}$$

とする。以下、この作業を繰り返す。

（第 n 手順） $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{x}_n - (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 - \cdots - (\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{e}_{n-1})\boldsymbol{e}_{n-1}$ とし、

$$\boldsymbol{e}_n = \frac{\boldsymbol{a}_n}{||\boldsymbol{a}_n||}$$

とする。

（シュミットの直交化によって正規直交系が得られる証明）

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{a}_i}{||\boldsymbol{a}_i||}$$

という得かたをしているので、$\boldsymbol{e}_i$ の長さが 1 であることは正しい。次には $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0$ を示そう。簡単のため、$i < j$ であるとして、j に関する数学的帰納法を用いる。$j = 2$ の時には $i = 1$ に決まっている。$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$ より

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1) \quad &= (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{e}_1) - (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) \\ &= (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{e}_1) - (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{e}_1) = 0\end{aligned}$$

となる。（$\boldsymbol{x}_2$ と $\boldsymbol{e}_2$ とは平行だから、これで示せたことになる。）$j > 2$ のときには、$\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{x}_j - (\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 - \cdots - (\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{e}_{j-1})\boldsymbol{e}_{j-1}$ であるから、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{j-1}$ が正規直交系という仮定を用いると、

$$(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{e}_i) - (\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{e}_i) = 0$$

である。したがって、j のときも正規直交系であることが示された。（証明終わり）

（シュミットの直交化によって張られる空間が、元のベクトルの張られる空間と一致する証明）

詳細は略すが大体次のような道筋である。元のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を使って $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を線形結合で書き表してみよう。

$\boldsymbol{e}_1$ は $\boldsymbol{x}_1$ の $1/||\boldsymbol{a}_1||$ 倍である。$\boldsymbol{e}_2$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ の線形結合で表わされ、$\boldsymbol{x}_2$ の係数は $1/||\boldsymbol{a}_2||$ である。以下同様に、$\boldsymbol{x}_i$ は $\boldsymbol{x}_1, , \cdots, \boldsymbol{x}_i$ の線形結合で表わされ、$\boldsymbol{x}_i$ の係数は $1/||\boldsymbol{a}_i||$ である。($\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が線形独立であることから、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が零ベクトル $\boldsymbol{o}$ にならないことが示される。)

このことから、ある実正方行列 P が存在して $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)P$ と書き表せるが、ここでの P は上三角行列（対角成分より下の成分はすべ 0）であり、対角成分は 0 ではない。そのような P の階数は n であり、正則行列である。したがって

$$\mathrm{span}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \mathrm{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$$

が従う。（証明終わり）

注意:　この証明は複素ベクトルについても成立する。内積を分配法則で展開するときの形に注意して、たどってみよう。

注意　任意の線形空間は基底を持つことから、任意の計量線形空間は正規直交基底をもつ。また、任意の線形独立なベクトルに対して、それらを含むような基底が存在することから、任意の正規直交系に対して、それらを含むような正規直交基底が存在する。

13-5　直交補空間

定義

計量線形空間 V と、その部分空間 W に対して、

$$W^{\perp} := \{\boldsymbol{v} \mid 任意の\ \boldsymbol{w} \in W\ に対して\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0\}$$

と定義し、これを W の**直交補空間**という。

定理

(1) $V = W \dotplus W^{\perp}$

(2) $(W^{\perp})^{\perp} = W$

(3) $(W_1 + W_2)^{\perp} = {W_1}^{\perp} \cap {W_2}^{\perp}$

(4) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = {W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp}$

（定理の証明）　(1)　W の正規直交基底を $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r \rangle$ とする。任意の V の元 $\boldsymbol{v}$ に対して、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{v} - \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

とすると、$\boldsymbol{x}$ の右辺は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ の線形結合であるから、W の元である。$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_i)$ を計算すると、シュミットの直交化の計算と同じ理屈から、$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_i) = 0$ となる。すなわち、$\boldsymbol{y}$ は $W^{\perp}$ の元である。（基底のベクトルと直交するということは、任意の W の元と直交するということに他ならない。）このことから、

任意の V の元 $\boldsymbol{v}$ は W の元 $\boldsymbol{x}$ と $W^\perp$ の元 $\boldsymbol{y}$ の元との和で書けることになるので、$V = W + W^\perp$ が示された。次には $W \cap W^\perp = \{\boldsymbol{o}\}$ を示す。$W \cap W^\perp$ の任意の元 $\boldsymbol{x}$ に対して、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ を考えると、これは W の元 $\boldsymbol{x}$ と $W^\perp$ の元 $\boldsymbol{x}$ との内積であると考えられる。したがって、$W^\perp$ の定義から、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ である。内積の公理より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ であり、$W \cap W^\perp = \{\boldsymbol{o}\}$ が示された。

(2)　この命題を示すために、次の補題を準備しよう。

補題

任意の V の正規直交基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ に対して、$W = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r \rangle$ であるならば、$W^\perp = \langle \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ である。

（補題の証明）　正規直交基底は互いに直行するから、$\boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ はそれぞれ、任意の W の元と直交する。したがって、$\boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の線形結合で表わされるベクトルは任の W の元と直交する。したがって $W^\perp \subset \langle \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ がいえた。(1) の結果より、$W^\perp$ の次元は $n - r$ であり、$\langle \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ の次元も $n - r$ である。したがって $W^\perp = \langle \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ である。（証明終わり）

(2) の証明　$W = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r \rangle$ であるとし、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ を含むような V の基底をとる。これをこの順でシュミットの直交化すれば、V の正規直交基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ が得られる。補題を用いれば、$W^\perp = \langle \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ である。もう一度おなじ補題を用いれば、$(W^\perp)^\perp = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r \rangle = W$ が得られる。（証明終わり）

(3)　${W_1}^\perp \cap {W_2}^\perp \subset (W_1 + W_2)^\perp$ を示す。

${W_1}^\perp \cap {W_2}^\perp$ の任意の元 $\boldsymbol{w}$ を固定して考える。任意の W_1 の元 $\boldsymbol{u}$ に対して $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) = 0$ である。同様に任意の W_2 の元 $\boldsymbol{v}$ に対して $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 0$ である。$W_1 + W_2$ の任意の元は $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ の形に書くことができ、$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = 0$ であるから、$(\boldsymbol{w} \in (W_1 + W_2)^\perp$ である。

次に $(W_1 + W_2)^\perp \subset {W_1}^\perp \cap {W_2}^\perp$ を示す。$(W_1 + W_2)^\perp$ の任意の元 $\boldsymbol{w}$ を固定して考える。$W_1 \subset W_1 + W_2$ だから、特に任意の W_1 の元 $\boldsymbol{u}$ に対して $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) = 0$ であり、$\boldsymbol{w} \in W_1^\perp$ である。。同様の理由により、$\boldsymbol{w} \in W_2^\perp$ でもある。したがって $\boldsymbol{w} \in {W_1}^\perp \cap {W_2}^\perp$ である。

以上により (3) が示された。

(4)　${W_1}^\perp$ と ${W_2}^\perp$ について (3) を適応すると

$$\begin{aligned}
&({W_1}^\perp)^\perp \cap ({W_2}^\perp) \perp = ({W_1}^\perp + {W_2}^\perp)^\perp \\
&W_1 \cap W_2 = ({W_1}^\perp + {W_2}^\perp)^\perp \\
&(W_1 \cap W_2)^\perp = {W_1}^\perp + {W_2}^\perp
\end{aligned}$$

よって (4) は示された。

13-6 計量同型

定義

線形空間 V が内積 $(\ ,\ )_V$ をもつとし、線形空間 W が内積 $(\ ,\ )_W$ をもつとする。もし線形写像 $f : V \to W$ が任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = (f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v}))_W$$

を満たすとき、f は**計量を保存する写像 (matrix preserving map) である**という。

特に、$f : V \to W$ が同型写像の時には**計量同型 (isometric)** であるという。

注意　次元の等しい二つの計量線形空間の間には必ず線形同型写像が存在する。というのは、計量線形空間には必ず正規直交基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ が存在し、これを $\boldsymbol{R}^n$ の標準的な正規直交基底 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ へ写す線形同型写像が存在するからである。

注意　計量同型写像は、ひとつの線形空間 V に 1 種類の内積 $(\ ,\ )$ を持ち、同型写像 $f : V \to V$ が上と同様の式を満たすときにも用いることができる。V が実計量空間ならばこのような f のことを直交変換という。V が複素計量空間ならば、このような f のことをユニタリ変換という。

注意　実座標空間 $\boldsymbol{R}^n$ で通常の内積 $(\ ,\ )$ を考えているとき、直交行列 A

に対して $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v})$ が成り立った。これも計量同型写像の一種であることがわかる。

注意　さらに、実計量線形空間 V における直交変換（計量同型写像）$f: V \to V$ があったとき、V 上の任意の正規直交基底に対して f を行列表示すると、直交行列になる。（複素計量線形空間の場合にはユニタリ行列になる。）