数学２演習（阿原：10月29日）

問題 [Q]（10点）

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ とし、

$$V = \{a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 20 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}$ が V に含まれることを示せ。

(2) $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ が V の基底であることを示せ。（基底の定義から、確認すべきことをすべて確かめよ。）

(3) $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ は V の基底である。（このことは証明不要である。）$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ から $\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \rangle$ への基底の取替行列を求めよ。

問題 [R]（10点）

x, y, z を変数とする実係数の多項式 $f(x, y, z)$ が**同次 n 次対称式**であるとは、以下の二つの条件を満たすことであるとする。

(a) ある実数 k が存在して、$f(x, x, x) = kx^n$ である。

(b) 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ について $f(a, b, c) = f(b, a, c) = f(a, c, b)$ が成り立つ。

$S_n[x, y, z] := \{$ 同次 n 次対称式 $\}$ と定義するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 同次 n 次多項式 $f(x, y, z)$ と任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して、$f(a, b, c) = f(c, a, b)$ を示せ。

(2) $S_n[x, y, z]$ は多項式の和について、また実数定数倍について閉じていることを示せ。

(3) $S_1[x, y, z]$ の任意の要素は $k(x + y + z)$ $(k \in \mathbb{R})$ という形で書き表せることを示せ。このことから $S_1[x, y, z] = \langle x + y + z \rangle$ である。

(4) $S_2[x, y, z] = \langle x^2 + y^2 + z^2, xy + yz + zx \rangle$ を示せ。

(5) $S_{10}[x, y, z]$ の（線形空間としての）次元を求めよ。（理由も述べること。）

(参考) $S_n[x, y, z]$ の次元を a_n としたときに、a_n を求めることができるだろうか。a_n が満たす漸化式を探したり、$\Sigma a_n x^n$ を求めたりしてみよ。