数学２演習（阿原：10月15日）解説

問題 [O]（10点）

(1) 写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が全射であることの定義、単射であることの定義をそれぞれ書け.

（解説）　写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が全射であるとは、任意の $y \in \mathbb{R}^m$ に対して、$f(x)=y$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在することである。

写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が単射であるとは、任意の $x, x' \in \mathbb{R}^n$ に対して、$f(x)=f(x')$ ならば $x=x'$ が成り立つことである。

(2) 写像 $f_1:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x-y-2z \end{pmatrix}$ が全射であるが単射でないことを定義より直接示せ。

（解説）　f_1 が全射である証明:任意の $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に対して、$\begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x-y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とおくと、たとえば、$x = \dfrac{X+Y}{3}, y = \dfrac{X-2y}{3}, z=0$ は解になっているので、f_1 は全射である。

f_1 が単射でない証明：$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -5k \\ 3k \end{pmatrix}$ に対して、任意の k に対して f_1 によって $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ へ写されるので、f_1 は単射ではない。

(3) 写像 $g_1:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ であって、任意の x, y について $f_1\left(g_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となるものを式で与えよ。（与えた g_1 がその等式を満たすことを証明せよ。）

（解説）　たとえば $g_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)/3 \\ (x-2y)/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおけばよい。実際に、

$f_1\left(g_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = g_1\begin{pmatrix} (x+y)/3 \\ (x-2y)/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が確認できる。

(4) 写像 $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ が単射であるが全射でないことを定義より直接示せ。

（解説） f_2 が単射であること：

$\begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x'+y' \\ x'-y' \\ x'+y' \end{pmatrix}$ とおいてこれを解くと $x = x', y = y'$ を得る。したがって f_2 は単射。

f_2 が全射でないこと：

たとえば $\begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を解くと解なしである。このことから f_2 は全射でない。

(5) 写像 $g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ であって、任意の x, y について $g_2 \left(f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となるものを式で与えよ。（与えた g_2 がその等式を満たすことを証明せよ。）

（解説） たとえば $g_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y+z)/2 \\ (-y+z)/2 \end{pmatrix}$ とおくと、$g_2 \left(f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) =$

$g_2 \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をえる。

問題 [P]（10 点）

(1) 集合 $sl(n, \mathbb{R}) := \{A : n$ 次正方行列 $| trA = 0\}$ は行列の和と定数倍に関して閉じていることを証明せよ。つまり、任意の $A, B \in sl(n, \mathbb{R})$ と任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して、$A + B \in sl(n, \mathbb{R}), cA \in sl(n, \mathbb{R})$ を証明せよ。

（解説） 任意の $A, B \in sl(n, \mathbb{R})$ について、$tr(A+B) = trA + trB = 0 + 0 = 0$ より $A + B \in sl(n, \mathbb{R})$ である。また、任意の実数 c について $tr(cA) = c \cdot trA = c \cdot 0 = 0$ より $cA \in sl(n, \mathbb{R})$ である。

(2) a, b, c を実数の定数とせよ。集合 $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0\}$ は関数の和と定数倍に関して閉じていることを証明せよ。（実際に微分方程式を解いて示してもよいが，解かずにも示すことができる。）

（解説） $f, g \in \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0\}$ であるとすると、$a(f+g)'' + b(f+g)' + c(f+g) = af'' + bf' + cf + ag'' + bg' + cg =$

$0+0=0$ であるので、$f+g$ もこの集合に含まれる。任意の実数 k について $a(kf)''+b(kf)'+c(kf)=c(af''+bf'+cf)=c\cdot 0=0$ であるので、kf のこの集合に含まれる。