数学２演習（阿原：10月15日）

問題 [O]（10点）

(1) 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が全射であることの定義、単射であることの定義をそれぞれ書け.

(2) 写像 $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x-y-2z \end{pmatrix}$ が全射であるが単射でないことを定義より直接示せ。

(3) 写像 $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ であって、任意の x, y について $f_1\left(g_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となるものを式で与えよ。（与えた g_1 がその等式を満たすことを証明せよ。）

(4) 写像 $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ が単射であるが全射でないことを定義より直接示せ。

(5) 写像 $g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ であって、任意の x, y について $g_2\left(f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となるものを式で与えよ。（与えた g_2 がその等式を満たすことを証明せよ。）

問題 [P]（10点）

(1) 集合 $sl(n, \mathbb{R}) := \{A : n \text{ 次正方行列} \mid trA = 0\}$ は行列の和と定数倍に関して閉じていることを証明せよ。つまり、任意の $A, B \in sl(n, \mathbb{R})$ と任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して、$A + B \in sl(n, \mathbb{R}), cA \in sl(n, \mathbb{R})$ を証明せよ。

(2) a, b, c を実数の定数とせよ。集合 $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0\}$ は関数の和と定数倍に関して閉じていることを証明せよ。（実際に微分方程式を解いて示してもよいが，解かずにも示すことができる。）

参考

以下の証明を読み、もし論理的な問題点があると思うならば、そのことについて論ぜよ。

(命題)

(1)　$f : X \to Y$ が全射 $\Longleftrightarrow$ $g : Y \to X$ であって、$f \circ g = \mathrm{id}$ であるものが存在する。

(2)　$f : X \to Y$ が単射 $\Longleftrightarrow$ $g : Y \to X$ であって、$g \circ f = \mathrm{id}$ であるものが存在する。

(証明)　(1) ($\Rightarrow$) $f : X \to Y$ が全射であることから、次のように g を構成する。すなわち、任意の $y \in Y$ に対して、ある $x \in X$ が存在して $f(x) = y$ であることから、このような y を１つ選びそれを $g(y) = x$ と定義する。このようにして定められた $g : Y \to X$ は、任意の y に対して、$f(g(y)) = f(x) = y$ となり、$f \circ g = \mathrm{id}$ が満たされる。

($\Leftarrow$) $f \circ g = \mathrm{id}$ となる g が存在することから、任意の $y \in Y$ に対して、$x = g(y)$ とおけば、$f(x) = f(g(y)) = y$ であり、f が全射であることが示される。

(2) （$\Rightarrow$）$f : X \to Y$ が単射であることから次のように g を構成する。任意の $y \in Y$ に対して、$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在するか、存在しないか，そのどちらかである。

もし $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する場合には、$g(y) = x$ と定義する。さもなくば $g(y)$ は任意の定数であると定める。このようにして定められた $g : Y \to X$ は、任意の x に対して、$g(f(x)) = g(y) = x$ となり、$g \circ f = \mathrm{id}$ が満たされる。

($\Leftarrow$)$g \circ f = \mathrm{id}$ となる g が存在することから、任意の $x_1, x_2 \in X$ が $f(x_1) = f(x_2)$ を満たすとすると、$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ であって、$x_1 = x_2$ である。したがって、f は単射である。