２００９年度数学II前期期末試験解説
（担当：阿原）

[1]（２０点）

(1) $z^2 = i$ を満たす複素数を二つ求めよ。$\sqrt{i}$ という記号は使えないことに注意せよ。

（解説）$z = x+yi$ とおいて、$z^2 = i$ に代入すると、$x^2 - y^2 = 0, 2xy = 1$ が得られるので、これを解いて $x = \pm(1+i)/\sqrt{2}$

(2) ３つの空間ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ によって構成される平行６面体の体積を求めよ。

（解説）３本の空間ベクトルの構成する平行６面体の体積は、行列式によって与えられるので,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

解答は 18 でも -18 でもよいこととする。

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ としたとき、$A = P^{-1}BP$ を満たすような正則行列 P が存在しないことを示せ。

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, |B| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$ で行列式が異なるから，というのが簡単な答え。$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として立式し、$a = b = c = d = 0$ を導いてもよい。

[2]（１５点）

(1) 次の連立方程式が解を持つように定数 a の値を定め、解を求めよ。

$$\begin{cases} 3x - 4y + z + 4w = 3 \\ 2x - 5y + 3z + 5w = a \\ -x + 6y - 5z - 6w = 7 \end{cases}$$

（解説）普通に解き始めると (第１式) $-$ 2(第２式) $-$ (第３式) $= 0$ であって、$a = -2$ であることがわかる。これを x, y について解けば

$$\begin{cases} x = \frac{23}{7} + z \\ y = \frac{12}{7} + z + w \end{cases}$$

を得る。

(2) あなたが線形代数を教える教員であると仮定して、線形代数のテストに連立方程式の問題を出題することを考えよう。答えが容易に解けるように配慮するため、４つの文字 x, y, z, w のうちのどれか２つの文字を**うまく選んで** その文字について解いたときに、解に現れる**係数すべてが整数である**ような問題を作りたい。そのつもりで作題したものが次のものであったとしよう。

$$\begin{cases} -3x + 5y - z + 3w = 1 \\ -x - 2y - 4z - 2w = 2 \end{cases}$$

試験時間が始まってから気がついたことだが、実はこれは失題であった。問題用紙を清書するときに数字を１だけ写し間違えていて、係数がすべて整数になるようには解けないのである。最初の目論見どおりの問題にするにはどのように訂正すればよいか。（問題文の数字を１変化させることにより、係数すべてが整数になるような解を持つような問題に訂正せよ、というのが問題の趣旨である。）さらに、その解も求めよ。

（解説）文意がわかりにくかったようだが，係数のうちの一つに ± 1 を加えて、整数係数の解を探せ，と言うのが問題である。手っ取り早く探す方法としては，４つの文字のうちの２つの文字について解くことを考えればよいから、クラメルの公式を念頭において，分母にあたる部分が ± 1 になるように細工をすればよいことがわかる。

解答は２つあり、第２式 $-2y$ を $-3y$ として y, w について解くか、第２式 $-2w$ を $-w$ にして y, w について解けばよい。解は省略。

[3](２０点)

２つの平面ベクトル（2 次列ベクトル）$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、実数を対応させるような写像 $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が次の性質 (a)〜(e) を満たすとする。$F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を決定したい。以下の問い（１）〜（４）に答えよ。

(a) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b}$ に対して $F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b}) = F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + F(\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b})$

(b) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$、任意の実数 c に対して $F(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c \cdot F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(c) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$

(d) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0$

(e) $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して、$F(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}) = 1, F(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}) = 2$

（以下設問）

(1) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b'}$ に対して $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b'}) = F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b'})$ を示せ。

（解説）

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b'}) &= F(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b'}, \boldsymbol{a}) \\ &= F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + F(\boldsymbol{b'}, \boldsymbol{a}) \\ &= F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b'}) \end{aligned}$$

(2) $F(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) = k$ とおく。このとき、$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$ を x_1, x_2, y_1, x_2, k の式で表わせ。

（解説）

$$\begin{aligned} F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= F(x_1\boldsymbol{e_1} + y_1\boldsymbol{e_2}, x_2\boldsymbol{e_1} + y_2\boldsymbol{e_2}) \\ &= x_1x_2 + k(x_1y_2 + y_1x_2) + 2y_1y_2 \end{aligned}$$

(3) k の取りうる値の範囲は限られる。その範囲を求めよ。

（解説）条件 (d) を用いることを考えると

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + 2kxy + 2y^2 = (x+ky)^2 + (2-k^2)y^2$$

である。右辺は最小値 $(2-k^2)y^2$ を持つから、これが 0 以上である十分条件は $2-k^2 \geq 0$、つまり、$-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}$ である。

(4) 命題「$F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$」が成り立つための k の範囲を求めよ。

（解説）前問の計算を用いると，もし $k^2 = 2$ であるならば、上式の右辺で $x + ky = 0$ のときには最小値 0 を持ってしまうので、この場合を除かなければならない。従って、$-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ が求める答えである。

[4]（１５点）

n 次行列の 行列式 によって定まる多項式 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ 1 & x & 1 & & \\ & 1 & x & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & x \end{vmatrix}$$

によって定める。

(1) $f_4(x)=0$ の解を求めよ。（２重根号はそのままでもよい。）

（解説）(2) を先に計算し，$f_1=x, f_2=x^2-1, f_3=x^3-2x, f_4=x^4-3x^2+1$ と求まる。これを解いて、

$$\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$$

を得る。（この二重根号ははずすことができる。）

(2) $f_n(x)$ に関する３項漸化式を求めよ。

（解説）第１列に関して展開公式を用いることにより，

$$f_n = xf_{n-1}-f_{n-2}$$

を得る。

(3) $f_n(x)=0$ の解が $2\cos\left(\dfrac{a\pi}{n+1}\right)$ （$a=1,2,\cdots,n$）の形で与えられることを示せ。（ヒント：$F_n(X)=f_n\left(X+\dfrac{1}{X}\right)$ とおいて、$F_n(X)$ を具体的に求め、$F_n(X)=0$ の解から x を求めよ。）

（解説）これはヒントなしでは難しかったかも。ヒントに従うと

$$F_n=(X+\frac{1}{X})F_{n-1}-F_{n-2},$$
$$F_1=X+\frac{1}{X}, F_2=X^2+1+X^{-2}$$

であることから、数学的帰納法を用いて、

$$F_n=X^n+X^{n-2}+\cdots+X^{-n+2}+X^{-n}$$

を証明することができる。$X^n(X^2+1)F_n(X)=X^{2n+2}-1$ に注意して $F_n(X)=0$ を解くと $X=\cos\left(\dfrac{a\pi}{n+1}\right)\pm\sin\left(\dfrac{a\pi}{n+1}\right)i$ と求まるので、$\dfrac{1}{X}=\cos\left(\dfrac{a\pi}{n+1}\right)\mp\sin\left(\dfrac{a\pi}{n+1}\right)i$(複号同順) より $x=X+\dfrac{1}{X}=2\cos\left(\dfrac{a\pi}{n+1}\right)$ と求まる。