２００９年度数学 II 前期期末試験
(担当：阿原)

解答用紙は１人に２枚配られる。１枚目の表に [1]、１枚目の裏に [2]、２枚目の表に [3]、２枚目の裏に [4] を解答せよ。なお、解答用紙には結果のみでなく、思考過程も必ず書くこと。

[1](２０点)

(1) $z^2 = i$ を満たす複素数を二つ求めよ。$\sqrt{i}$ という記号は使えないことに注意せよ。

(2) ３つの空間ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ によって構成される平行６面体の体積を求めよ。

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ としたとき、$A = P^{-1}BP$ を満たすような正則行列 P が存在しないことを示せ。

[2](１５点)

(1) 次の連立方程式が解を持つように定数 a の値を定め、解を求めよ。

$$\begin{cases} 3x - 4y + z + 4w = 3 \\ 2x - 5y + 3z + 5w = a \\ -x + 6y - 5z - 6w = 7 \end{cases}$$

(2) あなたが線形代数を教える教員であると仮定して、線形代数のテストに連立方程式の問題を出題することを考えよう。答えが容易に解けるように配慮するため、４つの文字 x, y, z, w のうちのどれか２つの文字を**うまく選んで** その文字について解いたときに、解に現れる**係数すべてが整数である**ような問題を作りたい。そのつもりで作題したものが次のものであったとしよう。

$$\begin{cases} -3x + 5y - z + 3w = 1 \\ -x - 2y - 4z - 2w = 2 \end{cases}$$

試験時間が始まってから気がついたことだが、実はこれは失題であった。問題用紙を清書するときに数字を１だけ写し間違えていて、係数がすべて整数になるようには解けないのである。最初の目論見どおりの問題にするにはどのように訂正すればよいか。（問題文の数字を１変化させることにより、係数すべてが整数になるような解を持つような問題に訂正せよ、というのが問題の趣旨である。）さらに、その解も求めよ。

[3]（２０点）

２つの平面ベクトル（2 次列ベクトル）$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、実数を対応させるような写像 $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が次の性質 (a)〜(e) を満たすとする。$F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を決定したい。以下の問い（１）〜（４）に答えよ。

(a) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b}$ に対して $F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b}) = F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + F(\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b})$

(b) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$、任意の実数 c に対して $F(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c \cdot F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(c) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = F(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$

(d) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0$

(e) $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して、$F(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}) = 1, F(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}) = 2$

（以下設問）

(1) 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b'}$ に対して $F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b'}) = F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b'})$ を示せ。

(2) $F(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) = k$ とおく。このとき、$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$ を x_1, x_2, y_1, x_2, k の式で表わせ。

(3) k の取りうる値の範囲は限られる。その範囲を求めよ。

(4) 命題「$F(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$」が成り立つための k の範囲を求めよ。

[4]（１５点）

n 次行列の 行列式 によって定まる多項式 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ 1 & x & 1 & & \\ & 1 & x & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & x \end{vmatrix}$$

によって定める。

(1) $f_4(x) = 0$ の解を求めよ。（２重根号はそのままでもよい。）

(2) $f_n(x)$ に関する３項漸化式を求めよ。

(3) $f_n(x) = 0$ の解が $2\cos\left(\dfrac{a\pi}{n+1}\right)$（$a = 1, 2, \cdots, n$）の形で与えられることを示せ。（ヒント：$F_n(X) = f_n\left(X + \dfrac{1}{X}\right)$ とおいて、$F_n(X)$ を具体的に求め、$F_n(X) = 0$ の解から x を求めよ。）