２００９年度数学II前期　演習（中間）追試（担当：阿原)：解説

[1]

次の一次連立方程式系の解を求めよ。

$$\begin{cases} x - 2y - 3z + w = 3 \\ 3x + y + z - w = 4 \\ 2x + 3y + 4z - 2w = 2 \end{cases}$$

（解説）

拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ である。これを行基本変形していく。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 1\text{行} \times(-3)\text{ を }2\text{行へ、}1\text{行} \times(-2)\text{ を }3\text{行へ}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 10 & -4 & -5 \\ 0 & 7 & 10 & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad 2\text{行} \times(-1)\text{ を }3\text{行へ}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 10 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このことにより、この連立一次方程式には**解がない**。

[2]

次の行列の階数を求めよ。x の値による場合分けを行うこと。

$$\begin{pmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{pmatrix}$$

（解説）

与えられた行列を行・列基本変形して標準形を目指す。多項式が成分に現れる場合には,場合分けが発生しないように分数式にならない形で変形するのがコツである。

$$\begin{pmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{pmatrix} \qquad \text{１列と２列を交換}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x+1 & -1 \\ x-1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x+1 \end{pmatrix} \qquad \text{１行}\times(-x+1)\text{ を２列に加え、１行}\times(-1)\text{ を３列に加える}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x+1 & -1 \\ 0 & -x^2+2 & x \\ 0 & -x-2 & x+2 \end{pmatrix} \qquad \text{１列を適宜２列・３列に加える}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2+2 & x \\ 0 & -x-2 & x+2 \end{pmatrix}$$

ここで第３行に着目すると $x-2$ を共通因子に持つことから, 場合分けを行う。

（場合１、$x=-2$ の場合）この場合には、$x=-2$ を代入して $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから階数は 2 である。

（場合２、$x \neq -2$ の場合）第３行を $x+2$ で割ることにより $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2+2 & x \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$。

$(2,3)$ 成分を消して $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2+x+2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$。$(3,2)$ 成分を消して $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2+x+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

２行・３行を交換、２列・３列を交換して $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x^2+x+2 \end{pmatrix}$ このことから、$-x^2+x+2=0$ のとき、すなわち $x=2, x=-1$ の時には階数が２、そのほかの場合には階数が３であることがわかる。以上を纏めて、

（答） $x=-2,-1,2$ のときは階数は 2、そのほかの場合には階数は 3 である。

（別解）与えられた行列が正方行列なので、行列式を求めてみるのも別法である。行列式は $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+2)(x+1)(x-2)$ である。$x=-2,-1,2$ の場合には実際に値を代入してみて、階数は 2。それ以外の場合には行列は正則行列なので階数は 3 である。

[3]

$n \times n$ 行列 A が $A^* + A = O$ を満たすとき A を歪エルミート行列というが、このとき A の (i, i) 成分はどのような性質の数であるか。ただし A^* は行列 A の随伴行列を表わすものとする。

（解説）　対角成分についてのみ聞かれているので、そこだけ調べればよいのだが、全成分を調べれば態度としてはよりよい。

(i, i) 成分を a_{ii} と書くことにすると、A^* の (i, i) 成分は $\overline{a_{ii}}$ である。$A^* + A = O$ であることから、$a_{ii} + \overline{a_{ii}} = 0$ である。したがって、a_{ii} は純虚数（実部が 0 であるような複素数）であることがわかる。

（以上）