数学２演習（阿原：６月２５日）解説

[L]（６点）

３次の置換 $1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ を考える。

(1) ３次の置換全体の集合 S_3 のすべての要素を $1, \sigma_1, \sigma_2$、またはこれらの積を用いて表せ。

(解)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_1\sigma_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_2\sigma_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_2$$

(2) 試行錯誤で、$1, \sigma_1, \sigma_2$ の間に成り立つ関係式（で本質的に異なるもの）を３つ見つけよ。

(解) たとえば、

$$\sigma_1^2 = 1, \quad \sigma_2^2 = 1, \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$$

など。第３式は $(\sigma_1\sigma_2)^3 = 1$ という書き表し方もある。

(3) (やや難)「任意の置換は隣接互換の積で書き表すことができる」という定理があるので、３次の任意の置換は σ_1, σ_2 の積で表すことができるわけだが、逆に、σ_1, σ_2 の積で書き表されている置換について、(2) で見つけた関係式を用いることにより、(1) の結果に帰着することができるか。

(解)σ_1, σ_2 の積で表される置換について，それらを (2) の関係式を用いて式変形することを考える。まず、$\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 1$ であるから、σ_1, σ_2 の積で表されるもののうち、同じものが並ぶようなものは少ない個数の積に帰着できることになる。また、$\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = 1$ から、６つ以上並んだ積はより少ない個数の積に帰着できる。以上の考察により次

のものを調べればよい。

$$
\begin{aligned}
&1\\
&\sigma_1\\
&\sigma_2\\
&\sigma_1\sigma_2\\
&\sigma_2\sigma_1\\
&\sigma_1\sigma_2\sigma_1\\
&\sigma_2\sigma_1\sigma_2=\sigma_1\sigma_2\sigma_1\\
&\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1\\
&\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1=\sigma_1\sigma_2\\
&\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1=\sigma_2\\
&\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2=\sigma_1
\end{aligned}
$$

以上により、(2) で得られた関係式により、(1) と同じ結果が得られることが示された。

[M]（6点)

(1) 4次の置換をすべて羅列することにより、行列式の定義に従って, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ を計算せよ。

(解)

$$
\begin{array}{cccccc}
1234 & 1243 & 1324 & 1342 & 1423 & 1432\\
+1 & -1 & +0 & +0 & +0 & +0\\
2134 & 2143 & 2314 & 2341 & 2413 & 2431\\
-1 & +1 & +0 & +0 & +0 & +0\\
3124 & 3142 & 3214 & 3241 & 3412 & 3421\\
+0 & +0 & +0 & +0 & +0 & +0\\
4123 & 4132 & 4213 & 4231 & 4312 & 4321\\
-1 & +0 & +0 & +0 & +0 & +0\\
=-1 & & & & &
\end{array}
$$

(2) 基本変形を行うことにより、行列式の値はどのように変化するかをそれぞれの場合について述べよ。

(解）行列式の交代性により、列の交換に関して行列式は (-1) 倍になる。行列式の多重線形性により、列の定数 c 倍に関しては行列式は c 倍になる。i 列を j 列に加える基本変形については、結論として行列式は変わらないが、これは次の二つの方法によりわかる。

まず、j 列の内容を i 列に置き換えたような行列を考えよ。この行列式は行列式の交代性により 0 である。このことから、j 列の内容の c 倍を i 列に置き換えたような行列についても、その行列式は 0 である。行列式の多重線形性（和に関する公式) により、i 列を j 列に加える基本変形については、もとの行列式に 0 を加えることになり、行列式は変化しない。

別のわかり方は以下の通りである。i 列を j 列に加える基本変形については、「基本変形を与える行列 R_n を右からかける」という作業を行うことと同等である。いま、R_n という行列の定義を見ると、単位行列に、1 箇所 c という成分を加えたものである。R_n は上三角行列か下三角行列のいずれかであることになり、$|R_n| = 1$ である。以上よりこの基本変形について行列式は変化しない。

行に関する基本変形については、「基本変形を与える行列」の行列式を考えるという方法もあるが，列の基本変形について解決済みであれば、「転置行列の行列式は等しい」という性質により、列による基本変形も行による基本変形も、行列式の変化に関しては同じ現象が現れると指摘すればよい。

[N]（8 点）

(1) n 次の置換 τ を一つ任意に固定する。n 次の置換全体の集合 S_n の要素をすべて数え上げて $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n!}$ と書くことにする。つまり、

$$S_n = \{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n!}\}$$

であるとする。このとき、$\tau\tau_1, \tau\tau_2, \cdots, \tau\tau_{n!}$ はすべて互いに異なることを示せ。このことより、$S_n = \{\tau\tau_1, \tau\tau_2, \cdots, \tau\tau_{n!}\}$ であることを示せ。

(解)$i \neq j$ に対して、もし $\tau\tau_i = \tau\tau_j$ であると仮定しよう。この両辺に左から τ^{-1} をかけることにより $\tau^{-1}\tau\tau_i = \tau^{-1}\tau\tau_j$ 従って、$\tau_i = \tau_j$ である。これは $i \neq j$ に反する。従って，$\tau\tau_1, \tau\tau_2, \cdots, \tau\tau_{n!}$ はすべて互いに異なることが示された。また、$\tau\tau_1, \tau\tau_2, \cdots, \tau\tau_{n!}$ はすべて S_n の元であることから、$S_n \supset \{\tau\tau_1, \tau\tau_2, \cdots, \tau\tau_{n!}\}$ は正しい。一方で $\tau\tau_1, \tau\tau_2, \cdots, \tau\tau_{n!}$ は $n!$ 個の互いに異なる元であることから、S_n の元の個数が $n!$ であることから、$S_n = \{\tau\tau_1, \tau\tau_2, \cdots, \tau\tau_{n!}\}$ でなければならない。

後半部分については次のように説明しても良い。もし、$\{\tau\tau_1, \tau\tau_2, \cdots, \tau\tau_{n!}\}$ が S_n の真部分集合であると仮定しよう。このとき、$\{\tau\tau_1, \tau\tau_2, \cdots, \tau\tau_{n!}\}$ の元の個数は $n!$ 個未満である。鳩ノ巣原理により、$\{\tau\tau_1, \tau\tau_2, \cdots, \tau\tau_{n!}\}$ には重複があることになり、前半の証明と矛盾を起こす。従って、真部分集合であることはない。

(2) 上と同じ記号を用いる。$\tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}, \cdots, \tau_{n!}^{-1}$ はすべて互いに異なることを示せ。このことより、$S_n = \{\tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}, \cdots, \tau_{n!}^{-1}\}$ であることを示せ。

(解)$i \neq j$ に対して、もし $\tau_i^{-1} = \tau_j^{-1}$ であると仮定しよう。この両辺に左から τ_i、右から τ_j をかけることにより $\tau_i \tau_i^{-1} \tau_j = \tau_i \tau_j^{-1} \tau_j$ 従って、$\tau_j = \tau_i$ である。これは $i \neq j$ に反する。従って，$\tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}, \cdots, \tau_{n!}^{-1}$ はすべて互いに異なることが示された。また、$\tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}, \cdots, \tau_{n!}^{-1}$ はすべて S_n の元であることから、$S_n \supset \{\tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}, \cdots, \tau_{n!}^{-1}\}$ は正しい。一方で $\tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}, \cdots, \tau_{n!}^{-1}$ は $n!$ 個の互いに異なる元であることから、S_n の元の個数が $n!$ であることから、$S_n = \{\tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}, \cdots, \tau_{n!}^{-1}\}$ でなければならない。

(3) n 次の置換全体の集合 S_n の部分集合で、偶置換（＝符号が 1 であるような置換）全体の集合を A_n と書くことにする。集合 A_n の元の個数が $n!/2$ であることを示せ。

(注）この問いでは暗黙のうちに $n \geq 2$ としたが、$n = 1$ の場合は特に断らない限り除外して考える。

（解) 奇置換全体の集合を $B_n = S_n \setminus A_n$ であるとおこう。1 と 2 を交換する互換を τ と書くことにすると、$\sigma \in A_n$ について $\sigma\tau$ は奇置換であり B_n に含まれる。$\sigma \in B_n$ について $\sigma\tau$ は偶置換であり A_n に含まれる。この対応により、A_n と B_n との間には一対一の対応（全単射）があることになり、元の個数は等しい。従って A_n の元の個数は $n!/2$ である。

(別証明）行列 A を「すべての成分が 1 であるような行列」であるとする。この行列式 $|A|$ は自明に 0 であるが、$|A|$ を定義に従って計算してみると、$\sigma \in S_n$ についての $\mathrm{sgn}(\sigma)$ についての総和が 0 であることを意味している。このことは、偶置換と奇置換とが同数あることを意味しており，A_n の元の個数は $n!/2$ である。