数学２演習（阿原：６月２５日）

[L]（６点）

3 次の置換 $1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ を考える。

(1) 3 次の置換全体の集合 S_3 のすべての要素を $1, \sigma_1, \sigma_2$、またはこれらの積を用いて表せ。

(2) 試行錯誤で、$1, \sigma_1, \sigma_2$ の間に成り立つ関係式（で本質的に異なるもの）を３つ見つけよ。

(3) （やや難)「任意の置換は隣接互換の積で書き表すことができる」という定理があるので、3 次の任意の置換は σ_1, σ_2 の積で表すことができるわけだが、逆に、σ_1, σ_2 の積で書き表されている置換について、(2) で見つけた関係式を用いることにより、(1) の結果に帰着することができるか。

[M]（６点)

(1) 4 次の置換をすべて羅列することにより、行列式の定義に従って, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ を計算せよ。

(2) 基本変形を行うことにより、行列式の値はどのように変化するかをそれぞれの場合について述べよ。

[N]（８点）

(1) n 次の置換 τ を一つ任意に固定する。n 次の置換全体の集合 S_n の要素をすべて数え上げて $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n!}$ と書くことにする。つまり、

$$S_n = \{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n!}\}$$

であるとする。このとき、$\tau\tau_1, \tau\tau_2, \cdots, \tau\tau_{n!}$ はすべて互いに異なることを示せ。このことより、$S_n = \{\tau\tau_1, \tau\tau_2, \cdots, \tau\tau_{n!}\}$ であることを示せ。

(2) 上と同じ記号を用いる。$\tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}, \cdots, \tau_{n!}^{-1}$ はすべて互いに異なることを示せ。このことより、$S_n = \{\tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}, \cdots, \tau_{n!}^{-1}\}$ であることを示せ。

(3) n 次の置換全体の集合 S_n の部分集合で、偶置換（＝符号が 1 であるような置換）全体の集合を A_n と書くことにする。集合 A_n の元の個数が $n!/2$ であることを示せ。