# ２００９年度数学II前期中間試験 (担当：阿原)

以下の問いに答えよ。手書きのもの、手書きのもののコピーは持ち込んで解いてもよい。隣の者と相談をしてはいけない。

## [1](8点)

（標準）次の行列に関する等式が成り立つように $a, b$ の値を定めよ。

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} -5 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 4 & -1 & a & 3 \end{pmatrix} = 2$$

## [2](8点)

（標準）次の連立一次方程式の解をすべて求めよ。

$$\begin{cases} x & -2y & -3z & +w & = 3 \\ 3x & +y & +z & -w & = 4 \\ 2x & +3y & +4z & -2w & = 1 \end{cases}$$

## [3](16点)

$n$ 次実正方行列 $A$ に対して、実数を対応させるような写像 $f(A)$ が次の性質 (a)〜(d) を満たすとする。$f(A)$ を決定したい。

**(a)** $f(A+B) = f(A) + f(B)$　($A, B$ は任意の正方行列。)

**(b)** $f(cA) = cf(A)$　($c$ は任意定数。$A$ は任意の正方行列。)

**(c)** $f(AB) = f(BA)$　　($A, B$ は任意の正方行列。)

**(d)** $f(E) = 1$

以下の問いに答えよ。（なお、(1)〜(6) のステップを踏まずに (7) が答えられるならば、それでもよい。）

**(1)** （標準）$f(O) = 0$ を示せ。

**(2)** （標準）$n$ を 2 以上の整数、$p, q$ を $1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n$ を満たす整数であるとする。$n$ 次正方行列 $E_{pq}$ を $(p, q)$ 成分のみが 1 でほかの成分が 0 であるような行列とする。たとえば、$n = 3, p = 1, q = 2$ とすると、$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。行列 $A$ の $(p, q)$ 成分が $a_{pq}$ であるとしたとき、$A$ を $a_{pq}$ と $E_{pq}$ で書き表せ。（裏面に問題は続く）

**(3)** （標準）$f(A)$ を $a_{pq}$ と $f(E_{pq})$ で書き表せ。

**(4)** （標準）任意の $1 \leq p, q, r, s \leq n$ に対して、$E_{pq}E_{rs}$ を求めよ。（答えは場合分けになる。）

**(5)** （標準）$1 \leq p, q, r \leq n$ のとき、$E_{pq}$ と $E_{qr}$ をルール (c) に適用することにより、$p \neq r$ のときの $f(E_{pr})$ を求めよ。

**(6)** （やや難）$p \neq q$ のとき、$f(E_{pp}) = f(E_{qq})$ を示せ。

**(7)** （やや難）任意の $A$ に対して $f(A)$ を求めよ。